

515D

515

D

نام

نام خانوادگی

محل امضاء

دانشگاه کتاب، جزوه و مقاله تخصصی ریاضی در

سایت ریاضیات ایران

بزرگترین سایت ریاضی

<http://IRmath.com>

صبح جمعه

۹۰/۱۱/۲۸

@IRmath



اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.

امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۱

مجموعه ریاضی - کد ۱۲۰۸

مدت پاسخگویی: ۳۰۰ دقیقه

IRmath

تعداد سؤال: ۱۳۰

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی	۳۰	۱	۳۰
۲	ریاضیات عمومی	۲۰	۳۱	۵۰
۳	معادلات دیفرانسیل	۱۰	۵۱	۶۰
۴	آمار و احتمال	۱۰	۶۱	۷۰
۵	توابع مختلط	۱۰	۷۱	۸۰
۶	جبر (۱)	۱۰	۸۱	۹۰
۷	آنالیز ریاضی (۱)	۱۰	۹۱	۱۰۰
۸	آنالیز ریاضی (۲)	۱۰	۱۰۱	۱۱۰
۹	آنالیز عددی (۱)	۱۰	۱۱۱	۱۲۰
۱۰	جبر خطی	۱۰	۱۲۱	۱۳۰

بهمن ماه سال ۱۳۹۰

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی باشد.

PART A: Vocabulary

Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the correct choice on your answer sheet.

- 1- The geology student made a surprising discovery; the volcano believed to be was about to erupt.
1) dormant 2) temporary 3) affable 4) vulnerable
- 2- We waited for the storm to before we left.
1) abase 2) abate 3) abridge 4) abide
- 3- The minister desired the position simply for the associated with it.
1) scope 2) status 3) origin 4) feature
- 4- The researcher made sure to check her measurements multiple times.
1) initial 2) apposite 3) diligent 4) vague
- 5- Denver's impractical plan to build a subway system was in 1970s.
1) surmised 2) scrapped 3) strived 4) scattered
- 6- such as hair color and eye color are inherited genetically from one's parents.
1) Traits 2) Enigmas 3) Omens 4) Dimensions
- 7- The company has \$1000 to the team to get the project started.
1) ascribed 2) bestowed 3) deposited 4) allocated
- 8- After a week the jury had still not reached a
1) status quo 2) suspect 3) verdict 4) sequence
- 9- Heavy rains had the expedition's progress through the north-west of the country.
1) abandoned 2) hindered 3) evaded 4) distressed
- 10- The rattlesnake is the most snake in the United States.
1) venomous 2) ancestral 3) haphazard 4) zealous

PART B: Cloze Test

Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

The ancient Romans built an extensive and (11) to serve their needs. The Roman road-building era began in 312 BC. The roads provided economic and military access from Rome to distant parts of its far-flung empire. The first road (12) the Appian Way, which led, from Rome to Brundisium (now Brindisi), a port (13) is now southern Italy. The Appian Way was the main route to Greece, and it ran over 560 km (350 mi). A second road, from Rome to Naples, provided the first stage of the route (14) by troops headed to Africa. Roman advances in road-building techniques included preparation of foundation soils and base courses, brick paving, and, (15), provision for adequate drainage.

- 11- 1) roads of durable system 2) system of durable roads
3) durable system of roads 4) durable road of systems
- 12- 1) was constructed 2) constructed was
3) that was constructed 4) was to construct
- 13- 1) in which it 2) in what 3) where is 4) which it is
- 14- 1) used 2) was used 3) be used 4) using
- 15- 1) the more important 2) most importantly
3) the most important 4) most important

PART C: Reading Comprehension

Directions: Read the following two passages and choose the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark it on your answer sheet.

PASSAGE 1:

Given two finite sets, we can always decide whether or not they have the same number of elements, and if not, we can always determine which set has more elements than the other. It is natural to ask whether the same is true of infinite sets. In other words, does it make sense to ask, for example, whether there are more circles in the plane than rational points on the line, or more functions defined in the interval $[0, 1]$ than lines in space? As will soon be apparent, questions of this kind can indeed be answered.

To compare two finite sets A and B, we can count the number of elements in each set and then compare the two numbers, but alternatively, we can try to establish a one-to-one correspondence between (the elements of) A and B, i.e., a correspondence such that each element in A corresponds to one and only one element in B and vice versa. It is clear that a one-to-one correspondence between two finite sets can be set up if and only if the two sets have the same number of elements. For example, to ascertain whether or not the number of students in an assembly is the same as the number of seats in the auditorium, there is no need to count the number of students and the number of seats. We need merely observe whether or not there are empty seats or students with no place to sit down. If the students can all be seated with no empty seats left, i.e., if there is a one-to-one correspondence between the set of students and the set of seats, then two sets obviously have the same number of elements. The important point here is that the first method (counting elements) works only for finite sets, while the second method (setting up a one-to-one correspondence) works for infinite sets as well as for finite sets.

- 16- A one-to-one correspondence can -----.
- 1) not be established for infinite sets
 - 2) only be established for discrete functions
 - 3) only be established for continuous functions
 - 4) be used as an alternative to counting elements of sets for comparison
- 17- Concerning two infinite sets, it is -----.
- 1) impossible to establish whether one has more elements than the other
 - 2) possible to establish whether one has more elements than the other
 - 3) irrational to ask about their comparative size
 - 4) always appropriate to assume the existence of a one-to-one correspondence between them
- 18- Consider the following two questions:
- (1) Are there more circles in the plane than rational points in space?
 - (2) Are there more functions defined in the interval $[0,1]$ than lines in space?
- Choose the correct sentence.
- 1) Both questions are meaningful.
 - 2) Both questions are senseless.
 - 3) (1) makes sense but (2) does not.
 - 4) (2) makes sense but (1) does not.
- 19- A one-to-one correspondence between two sets A and B is established ----- each element in A corresponds to an element in B.
- 1) when
 - 2) only if
 - 3) if
 - 4) if and only if

- 20- Counting ----- as a means for establishing whether a set A has more elements than a set B.
 1) always works 2) never works 3) is inappropriate 4) may not always work

PASSAGE 2:

There is one more problem about the determinant. It is difficult not only to decide on its importance, and its proper place in the theory of linear algebra, but also to decide on its definition. Obviously, $\det A$ will not be some extremely simple function of n^2 variables, otherwise A^{-1} would be much easier to find than it actually is.

The simple things about the determinant are not the explicit formulas by which it can be expressed, but the properties it possesses. This suggests the natural place to begin. The determinant can be (and will be) defined by its three most basic properties. The problem is then to show how, by systematically using these properties to simplify the formulas, the value of the determinant can be computed. This will bring us back to Gaussian elimination, and to the product of the pivots. And the more difficult theoretical problem is to show that whatever the order in which the properties are used, the result is always the same—the defining properties are self-consistent.

The next section lists the defining properties of the determinant, and their most important consequences. Then Section 4.3 gives several possible formulas for the determinant—one is an explicit formula with $n!$ terms, another is a formula “by induction,” and the third is the one involving pivots from which the determinant of a large matrix is actually computed. In Section 4.4 the determinant is applied to find A^{-1} and then to solve for $x = A^{-1}b$; the latter is Cramer’s rule. And finally, in an optional remark on permutations, we prove that the properties are self-consistent, so that there is no ambiguity in the definition.

- 21- The computation of A^{-1} -----.
 1) results in explicit formulas for the determinant
 2) is difficult because Gaussian elimination cannot be used
 3) is possible by means of the determinant
 4) is only possible by means of Cramer’s rule
- 22- The determinant -----.
 1) has a simple definition expressed by explicit formulas
 2) can be computed by means of the pivots in Gaussian elimination
 3) is useless in the theory of linear algebra
 4) is complicated to compute because Gaussian elimination is a complicated process
- 23- It is ----- the properties of the determinant are self-consistent.
 1) difficult to establish whether 2) easily established that
 3) impossible to establish whether 4) inappropriate to ask whether
- 24- The determinant of a matrix A is not easily at hand because -----.
 1) A^{-1} is hard to compute
 2) it does not have simple properties
 3) simple functions for its definition do not exist
 4) the defining properties are not self-consistent

25- Choose the correct sentence.

- 1) The determinant is not useful for solving linear equations.
- 2) The determinant is extremely useful in mathematics.
- 3) The determinant does not have a proper place in the theory of linear algebra.
- 4) Basic properties of the determinant can be used to simplify the explicit formulas for its computation.

In the following 5 questions, select the most appropriate selection.

26- Mathematics is ----- by its so many applications.

- 1) adversely effected 2) enriched 3) degraded 4) merely identified

27- Mathematics shares much in common with many areas in physical sciences, namely, the exploration of the logical ----- of -----.

- 1) proof / axioms 2) axioms / choice
- 3) consequences/ assumptions 4) theorem / alternatives

28- This is a difficult way to solve the problem. You should think of ----- solution to the problem.

- 1) a proper 2) an alternative 3) an alarming 4) a convoluted

29- You need to give a reason. There is no ----- behind your argument.

- 1) quantity 2) logic 3) quality 4) optimism

30- Students are not attracted to mathematics. We need to make ----- changes to our approach in teaching mathematics.

- 1) affordable 2) fundamental 3) astonishing 4) cosmetic

ریاضیات عمومی

۳۱- هرگاه $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x \operatorname{sgn} |\sin(n! \pi x)|$ که sgn تابع علامت است، آنگاه ضابطه f کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad (۱)$$

$$f(x) = x \quad (۲)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad (۳)$$

$$f(x) = 0 \quad (۴)$$

۳۲- فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد و برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ در رابطه $|f(x) - f(y)| \geq \frac{1}{2} |x - y|$ صدق کند. آنگاه تابع f :

(۱) یک به یک و پوشا است.

(۲) یک به یک است و پوشا نیست.

(۳) یک به یک نیست و پوشا است.

(۴) نه یک به یک است و نه پوشا است.

۳۳- اگر $f : (a, b) \rightarrow [c, d]$ مشتق پذیر و پوشا باشد آنگاه کدام گزینه لزوماً درست است؟

(۱) f' حداکثر یک ریشه دارد.

(۲) f' حداقل دو ریشه دارد.

(۳) f' ریشه ندارد.

(۴) f' دقیقاً دو ریشه دارد.

۳۴- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{3n}} \right]$ برابر است با:

(۱) ۰

(۲) $2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۴) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

۳۵- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{(n^2)}}{((4n)!)^n}$ برابر است با:

(۱) ۰

(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) ۱

(۴) $+\infty$

۳۶- فرض کنید $p > 1$ و $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ، در این صورت مقدار سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^p}$ برابر است با:

(۱) $\alpha 2^{-p}$

(۲) $\alpha 2^p$

(۳) $\alpha(1-2^{-p})$

(۴) $\alpha(1+2^p)$

۳۷- مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3^n)}$ برابر است با:

(۱) $\frac{2}{3}$

(۲) $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

(۳) $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

(۴) $\frac{2}{3}$

۳۸- فرض کنید f و g بر $\mathbb{R}$ با ضابطه‌های $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^t(t^t+1)}}{t^t+1} dt$ ، $f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^t} dt \right)^t$ تعریف شوند، در این صورت به ازای هر $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) + g'(x) = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

$$f(x) - g(x) = \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$f'(x) = 0 \quad (4)$$

۳۹- سطح محصور توسط دو منحنی $y = \pm \ln x$ و خط $x = e$ را حول محور y ها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل از دوران برابر است با:

$$\frac{\pi}{2}(e^2 - 1) \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2}(e^2 + 1) \quad (2)$$

$$\pi(e^2 - 1) \quad (3)$$

$$\pi(e^2 + 1) \quad (4)$$

۴۰- برای هر $x \geq 0$ فرض کنید $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^t)^{\frac{1}{t}}}$ و g معکوس تابع f باشد. آنگاه کدام گزینه درست است؟

$$g'' = \frac{-3g^t}{(1+g^t)^{\frac{1}{t}}} \quad (1)$$

$$g'' = \frac{3}{2}g^t \quad (2)$$

$$g'' = \frac{3g^t}{(1+g)^{\frac{1}{t}}} \quad (3)$$

$$g'' = -\frac{3}{2}g^t \quad (4)$$

۴۱- اگر $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ آنگاه $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{\sin x \cos x}{x} dx$ برابر کدام است؟

$$\frac{\pi}{4} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\frac{3\pi}{4} \quad (3)$$

$$\pi \quad (4)$$

هرگاه $z = x^2 + y^2 + \arctg \frac{x^2 + y^2}{x - y}$ آنگاه $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$ برابر است با: -۴۲

$$2(x^2 + y^2) + \sin(2 \arctg \frac{x^2 + y^2}{x - y}) \quad (۱)$$

$$2(x^2 + y^2) + \sin(2(x^2 + y^2)) \quad (۲)$$

$$2(x^2 + y^2) + \arctg \frac{x^2 + y^2}{x - y} \quad (۳)$$

$$2(x^2 + y^2) + \frac{2(x^2 + y^2)}{x - y} \quad (۴)$$

ماکسیمم و مینیمم مقادیر تابع f با معادله $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ و با قید $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$ کدام است؟ -۴۳

$$\min f = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (۱)$$

$$\max f = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (۲)$$

$$\min f = -\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$\max f = 2$$

$$\min f = -\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$\max f = \sqrt{2}$$

$$\min f = -1 \quad (۵)$$

$$\max f = +1$$

هرگاه $w(\alpha, \beta)$ مختصات مرکز انحنا منحنی مسطح (c) در نقطه p باشد و ϕ زاویه خط مماس در نقطه p با جهت مثبت محور x ها باشد، کدام یک از روابط زیر درست است؟ -۴۴

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\operatorname{tg} \phi \quad (۱)$$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \cot g \phi \quad (۲)$$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\cot g \phi \quad (۳)$$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \operatorname{tg} \phi \quad (۴)$$

۴۵- منحنی با نمایش $r = a(1 - \cos \theta)$ را در نظر می‌گیریم. هرگاه فاصله مبدا تا خط مماس در نقطه دلخواه p روی منحنی را با q نشان دهیم و فاصله مبدا تا نقطه p را با r نمایش دهیم، رابطه مستقل از θ بین q و r کدام است؟

$$(1) \quad r^2 q^2 = 2a$$

$$(2) \quad q^2 r^2 = 2a$$

$$(3) \quad r^2 = 2a q^2$$

$$(4) \quad q^2 = 2a r^2$$

۴۶- مقدار $\int_0^1 \int_y^1 x^{-\frac{2}{3}} \cos\left(\frac{\pi y}{2x}\right) dx dy$ کدام است؟

$$(1) \quad \frac{\pi}{4}$$

$$(2) \quad \sqrt{2}$$

$$(3) \quad \frac{4}{\pi}$$

$$(4) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۴۷- مقدار انتگرال $\iiint_D \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + 4y^2 + z^2} dx dy dz$ که D ناحیه $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ است کدام است؟

$$(1) \quad \frac{2\pi}{9}$$

$$(2) \quad \frac{4\pi}{9}$$

$$(3) \quad \frac{2\pi}{3}$$

$$(4) \quad \frac{4\pi}{3}$$

۴۸- انتگرال سطح $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$ کدام است؟ که در آن $\vec{F} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ و سطح S کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است.

$$(1) \quad \frac{12\pi}{5}$$

$$(2) \quad \frac{2\pi}{5}$$

$$(3) \quad \frac{6\pi}{5}$$

$$(4) \quad \frac{\pi}{5}$$

۴۹- مقدار انتگرال منحنی الخط $\vec{F} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$ روی منحنی فصل مشترک کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

و سهمی $z = x^2 + y^2$ در جهت مثبت کدام است؟

$$(1) \quad -2\pi$$

$$(2) \quad -\pi$$

$$(3) \quad \pi$$

$$(4) \quad 2\pi$$

۵۰- شار گذرنده بیرونی میدان $\vec{F}(x,y,z) = (e^{y^2+z^2}, e^{z^2+x^2}, e^{x^2+y^2})$ از سطح نیم کره بالایی $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ چقدر است؟

(۱) $\frac{\pi}{2}(1-e)$

(۲) $\pi(e-1)$

(۳) $\frac{\pi}{2}(e-1)$

(۴) $\pi(1-e)$

معادلات دیفرانسیل

۵۱- معادله دیفرانسیل $t \frac{dy}{dt} + y^2 = 0$ با شرط اولیه $y(1) = 1$ داده شده است. بزرگترین t -فاصله‌ای که آن مسأله مقدار اولیه دارای جواب باشد، کدام است؟

(۱) $(\frac{2}{e}, \infty)$

(۲) $[\frac{1}{e}, \infty)$

(۳) $(\frac{1}{e}, \infty)$

(۴) $(-\infty, \frac{1}{e})$

۵۲- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' - x \sin(2y) = x e^{-x^2} \cos^2 y$ کدام است؟

(۱) $4 \tan y + \alpha e^{x^2} + 2e^{-x^2} = 0$

(۲) $4 \tan y + \alpha e^{x^2} - 2e^{-x^2} = 0$

(۳) $4 \tan y + \alpha e^{x^2} + e^{-x^2} = 0$

(۴) $4 \tan y + \alpha e^{-x^2} - e^{+x^2} = 0$

۵۳- کدام گزینه می‌تواند جواب معادله زیر باشد؟

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$$

(۱) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{1}{2}}$

(۲) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1}$

(۳) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

(۴) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-\frac{1}{2}}$

جواب کامل کدام دستگاه معادلات دیفرانسیل است؟ (که در آن $D = \frac{d}{dt}$). -۵۴

$$\begin{cases} x = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ y = c_1 e^t + 3c_2 e^{2t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\Delta D + 4)x + Dy = 0 \\ 3Dx + (D + 4)y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} (\Delta D - 4)x - Dy = 0 \\ 3Dx + (D - 4)y = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} (\Delta D - 4)x + Dy = 0 \\ 3Dx - (D - 4)y = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} (\Delta D + 4)x - Dy = 0 \\ 3Dx + (D + 4)y = 0 \end{cases} \quad (4)$$

-۵۵ کدام گزینه می‌تواند شکل پیشنهادی یک انتگرال خصوصی (y_p) معادله دیفرانسیل مرتبه سوم

$$y''' + y' = xe^x \cos(x) + 4 \text{ باشد؟}$$

$$y_p = e^x(A \cos x + B \sin x) + Ex \quad (1)$$

$$y_p = e^x[(Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x] + Ex \quad (2)$$

$$y_p = e^x[(Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x] \quad (3)$$

$$y_p = e^x(Ax+B)\cos x + Ex \quad (4)$$

-۵۶ معادله‌ای که مقادیر ویژه مسأله مقدار مرزی - اولیه زیر را می‌توان از آن بدست آورد کدام است؟

$$y'' + \lambda y = 0, \quad \lambda > 0$$

$$y(0) = 0, \quad y(l) + y'(l) = 0$$

$$\tan \sqrt{\lambda} + \lambda = 0 \quad (1)$$

$$\tan \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} = 0 \quad (2)$$

$$\sin \sqrt{\lambda} - \lambda \cos \sqrt{\lambda} = 0 \quad (3)$$

$$\tan \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} = 0 \quad (4)$$

۵۷- x^2 و $x^2 \ln |x|$ دو جواب مستقل خطی معادله $y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = 0$ است، که در آن $f_1(x)$ و $f_2(x)$ در فاصله I

که شامل صفر نیست پیوسته‌اند. ضریب مشتق مرتبه اول در این معادله کدام است؟

(۱) $3x$

(۲) $-4x^2$

(۳) $\frac{4}{x^2}$

(۴) $-\frac{3}{x}$

۵۸- یک کران پائین برای شعاع همگرایی سریهای جواب معادله $(x^2 + x^2 + x + 1)y'' + (x^2 + 1)y' + y = 0$ در $x_0 = 1$

کدام است؟ (فرض کنید R شعاع همگرایی سریهای جواب باشد.)

(۱) $R \geq 1$

(۲) $R \geq 2$

(۳) $R = 2$

(۴) $R \geq \sqrt{2}$

۵۹- تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \sin(t) [H(t) - H(t - \pi)]$ کدام است؟ ($H(t)$ تابع هوی‌ساید است.)

(۱) $F(s) = \frac{e^{-s\pi}}{1+s^2}$

(۲) $F(s) = \frac{1-e^{-s\pi}}{1+s^2}$

(۳) $F(s) = \frac{1+e^{-s\pi}}{1+s^2}$

(۴) $F(s) = \frac{e^{s\pi}}{1+s^2}$

۶۰- مقدار $\int_0^t J_0(x) J_0(t-x) dx$ که در آن $J_0(x)$ تابع بسل از مرتبه صفر است، کدام است؟

(۱) $t \sin t$

(۲) $t \cos t$

(۳) $\cos t$

(۴) $\sin t$

سطح زیر منحنی نرمال استاندارد

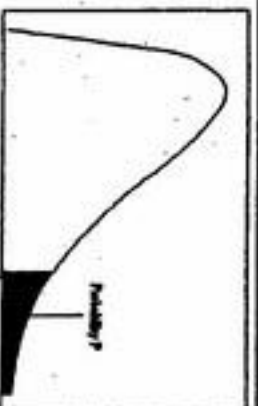
z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8483	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9924	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997	.9997	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

مقادیر بحرانی توزیع t

df	1.0	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.582	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756

مقادیر بحرانی توزیع مربع کای

df	.995	.990	.975	.950	.900	.850	.800	.750	.700	.650	.600	.550	.500	.450	.400	.350	.300	.250	.200	.150	.100	.050	.025	.010	.005
1	4E-5	0.0001	0.0009	0.0039	0.0103	0.0135	0.0168	0.0200	0.0239	0.0279	0.0319	0.0358	0.0398	0.0438	0.0478	0.0518	0.0558	0.0598	0.0638	0.0678	0.0718	0.0758	0.0798	0.0838	0.0878
2	0.010	0.0201	0.0506	0.1035	0.2158	0.2558	0.2958	0.3358	0.3758	0.4158	0.4558	0.4958	0.5358	0.5758	0.6158	0.6558	0.6958	0.7358	0.7758	0.8158	0.8558	0.8958	0.9358	0.9758	1.0158
3	0.071	0.1148	0.2158	0.3518	0.5841	0.7107	0.8373	0.9639	1.0905	1.2171	1.3437	1.4703	1.5969	1.7235	1.8501	1.9767	2.1033	2.2299	2.3565	2.4831	2.6097	2.7363	2.8629	2.9895	3.1161
4	0.206	0.2971	0.4844	0.7107	1.0604	1.3858	1.7112	2.0366	2.3620	2.6874	3.0128	3.3382	3.6636	3.9890	4.3144	4.6398	4.9652	5.2906	5.6160	5.9414	6.2668	6.5922	6.9176	7.2430	7.5684
5	0.411	0.5543	0.8312	1.1454	1.7709	2.2363	2.7017	3.1671	3.6325	4.0979	4.5633	5.0287	5.4941	5.9595	6.4249	6.8903	7.3557	7.8211	8.2865	8.7519	9.2173	9.6827	10.1481	10.6135	11.0789
6	0.675	0.8720	1.2373	1.6353	2.3707	2.9403	3.5099	4.0795	4.6491	5.2187	5.7883	6.3579	6.9275	7.4971	8.0667	8.6363	9.2059	9.7755	10.3451	10.9147	11.4843	12.0539	12.6235	13.1931	13.7627
7	0.989	1.2390	1.6898	2.1673	3.0043	3.6739	4.3435	5.0131	5.6827	6.3523	7.0219	7.6915	8.3611	9.0307	9.7003	10.3699	11.0395	11.7091	12.3787	13.0483	13.7179	14.3875	15.0571	15.7267	16.3963
8	1.344	1.6445	2.1797	2.7026	3.6403	4.3099	5.0007	5.6915	6.3823	7.0731	7.7639	8.4547	9.1455	9.8363	10.5271	11.2179	11.9087	12.5995	13.2903	13.9811	14.6719	15.3627	16.0535	16.7443	17.4351
9	1.734	2.0879	2.7003	3.3251	4.3634	5.0330	5.7238	6.4146	7.1054	7.7962	8.4870	9.1778	9.8686	10.5594	11.2502	11.9410	12.6318	13.3226	14.0134	14.7042	15.3950	16.0858	16.7766	17.4674	18.1582
10	2.155	2.5382	3.2469	3.9548	5.0931	5.7627	6.4535	7.1443	7.8351	8.5259	9.2167	9.9075	10.5983	11.2891	11.9799	12.6707	13.3615	14.0523	14.7431	15.4339	16.1247	16.8155	17.5063	18.1971	18.8879
11	2.603	3.0334	3.8157	4.5748	5.8137	6.4833	7.1741	7.8649	8.5557	9.2465	9.9373	10.6281	11.3189	12.0097	12.7005	13.3913	14.0821	14.7729	15.4637	16.1545	16.8453	17.5361	18.2269	18.9177	19.6085
12	3.073	3.5705	4.4037	5.2260	6.4649	7.1345	7.8253	8.5161	9.2069	9.8977	10.5885	11.2793	11.9701	12.6609	13.3517	14.0425	14.7333	15.4241	16.1149	16.8057	17.4965	18.1873	18.8781	19.5689	20.2597
13	3.565	4.1069	5.0087	5.8918	7.1307	7.8003	8.4911	9.1819	9.8727	10.5635	11.2543	11.9451	12.6359	13.3267	14.0175	14.7083	15.3991	16.0899	16.7807	17.4715	18.1623	18.8531	19.5439	20.2347	20.9255
14	4.074	4.6604	5.6287	6.5706	7.8095	8.4791	9.1699	9.8607	10.5515	11.2423	11.9331	12.6239	13.3147	14.0055	14.6963	15.3871	16.0779	16.7687	17.4595	18.1503	18.8411	19.5319	20.2227	20.9135	21.6043
15	4.600	5.2293	6.2621	7.2609	8.5007	9.1703	9.8611	10.5519	11.2427	11.9335	12.6243	13.3151	14.0059	14.6967	15.3875	16.0783	16.7691	17.4599	18.1507	18.8415	19.5323	20.2231	20.9139	21.6047	22.2955
16	5.142	5.8122	6.9076	7.9616	9.2015	9.8711	10.5619	11.2527	11.9435	12.6343	13.3251	14.0159	14.7067	15.3975	16.0883	16.7791	17.4699	18.1607	18.8515	19.5423	20.2331	20.9239	21.6147	22.3055	22.9963
17	5.697	6.4077	7.5641	8.6717	9.9115	10.5811	11.2719	11.9627	12.6535	13.3443	14.0351	14.7259	15.4167	16.1075	16.7983	17.4891	18.1799	18.8707	19.5615	20.2523	20.9431	21.6339	22.3247	23.0155	23.7063
18	6.264	7.0149	8.2307	9.3904	10.6303	11.3000	11.9908	12.6816	13.3724	14.0632	14.7540	15.4448	16.1356	16.8264	17.5172	18.2080	18.8988	19.5896	20.2804	20.9712	21.6620	22.3528	23.0436	23.7344	24.4252
19	6.843	7.6337	8.9065	10.1117	11.3515	12.0212	12.7120	13.4028	14.0936	14.7844	15.4752	16.1660	16.8568	17.5476	18.2384	18.9292	19.6200	20.3108	21.0016	21.6924	22.3832	23.0740	23.7648	24.4556	25.1464
20	7.433	8.2604	9.5907	1																					



۶۱- دامنه تغییرات داده‌های داخل جعبه در نمودار جعبه‌ای داده‌های زیر کدام است؟

۸, ۷, ۲۱, ۱۹, ۵, ۱۰, ۱۲, ۹, ۱۱, ۱۷, ۱۴, ۱۶, ۲۳, ۲۰, ۱۸

۹ (۱)

۱۰ (۲)

۱۱ (۳)

۱۲ (۴)

۶۲- یک آزمایش تصادفی دارای N برآمد است که با $e_1, e_2, \dots, e_N$ نشان داده می‌شوند، فرض کنید پیشامد ساده $\{e_{j+1}\}$

احتمالش دو برابر احتمال پیشامد ساده $\{e_j\}$ باشد، $j=1, 2, \dots, N-1$. اگر $A_k = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ مقدار

$P(A_k)$ کدام است؟

$$\frac{2^k - 1}{2^N - 1} \quad (۱)$$

$$\frac{2^k}{2^N - 1} \quad (۲)$$

$$\frac{2^k + 1}{2^N - 1} \quad (۳)$$

$$\frac{2^{k-1} + 1}{2^N - 1} \quad (۴)$$

۶۳- فرض کنید N دارای توزیع پواسون با پارامتر λ و $X|N=n$ دارای توزیع $\text{Bin}(n, p)$ باشد. مقدار $\text{Var}(X)$ کدام

است؟

$$\lambda p \quad (۱)$$

$$\lambda q \quad (۲)$$

$$\lambda^2 q \quad (۳)$$

$$\lambda^2 p \quad (۴)$$

۶۴- فرض کنید میزان بارندگی یک شهر از توزیع نرمال با میانگین ۱۲° میلی‌متر و واریانس ۹ پیروی می‌کند. احتمال اینکه سال

آینده اولین سالی باشد که بعد از ۵ سال متوالی میزان بارندگی بیشتر از ۱۲° میلی‌متر گزارش شود کدام است؟

$$\frac{2}{17} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{32} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{8} \quad (۴)$$

۶۵- فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(0,1)$ باشد. اگر $T = \sum_{i=1}^{100} X_i^2$ مقدار $P(T > 100)$ تقریباً

کدام است؟

(۱) صفر

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) ۰/۹۵

(۴) یک

۶۶- برای مقایسه دو جامعه داده‌های زیر را در اختیار داریم. با فرض نرمال بودن دو جامعه و یکسان بودن واریانسها مقدار آماره آزمون برای برابر بودن میانگین جامعه‌ها کدام است؟

x	۴	۷	۸	۷	۹
y	۵	۴	۸	۶	۷

(۱) $\sqrt{\frac{6}{5}}$

(۲) $\sqrt{\frac{5}{6}}$

(۳) $\frac{5}{6}$

(۴) $\frac{6}{5}$

۶۷- فرض کنید $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان باشند. اگر $X_i \sim N(0,1)$ و $Y_i | X_i = x_i \sim N(x_i \theta, 1)$ باشند، برآوردگر ماکزیمم درست‌نمایی (MLE) پارامتر θ

کدام است؟

$$\sum_{i=1}^n X_i Y_i / \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (۱)$$

$$\sum (X_i - \bar{X}) (Y_i - \bar{Y}) / \sum (X_i - \bar{X})^2 \quad (۲)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} X_i Y_i / \sum_{i=1}^{n-1} X_i^2 \quad (۳)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 / \sum_{i=1}^n X_i Y_i \quad (۴)$$

۶۸- فرض کنید براساس یک نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی از دانشجویان آمار در یک دانشگاه ۳۶ نفر پسر باشند. یک فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای نسبت پسران دانشگاهی در رشته آمار کدام است؟

(۱) (۰/۷۵, ۰/۷۷)

(۲) (۰/۲۷, ۰/۴۵)

(۳) (۰/۶۳, ۰/۶۵)

(۴) (۰/۳۴, ۰/۳۶)

۶۹- در یک مدل رگرسیون خطی ساده $Y = \alpha + \beta x + \varepsilon$ ، براساس یک نمونه تصادفی ۱۶ تایی خلاصه اطلاعات زیر حاصل شده است. برآورد واریانس $\hat{\beta}$ کدام است؟

$$\bar{x} = 2, \quad \bar{y} = 3, \quad \sum x_i^2 = 73, \quad \sum Y_i^2 = 160, \quad r = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{21} \quad (1)$$

$$\frac{1}{9} \quad (2)$$

$$\frac{5}{42} \quad (3)$$

$$\frac{1}{14} \quad (4)$$

۷۰- فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ یک نمونه تصادفی از $\text{Bin}(1, p)$ باشد و ناحیه بحرانی آزمون $H_0: p = \frac{1}{3}$ در مقابل

$$H_1: p = \frac{1}{2} \quad \text{بصورت } C = \left\{ (x_1, \dots, x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} x_i \geq c \right\} \text{ باشد. اگر } \bar{x} = 9 \text{ گزارش شود } p\text{-مقدار}$$

(p-value) کدام است؟

$$\frac{12}{2^{10}} \quad (1)$$

$$\frac{10}{2^{10}} \quad (2)$$

$$\frac{11}{2^{10}} \quad (3)$$

$$\frac{9}{2^{10}} \quad (4)$$

۷۱- ریشه‌های معادله $\sinh(iz) = 1$ برابر است با:

(۱) $n\pi + (-1)^{n+1}i \ln(\sqrt{2}+1)$

(۲) $n\pi + i \ln(\sqrt{2}+1)$

(۳) $n\pi - i \ln(\sqrt{2}+1)$

(۴) $n\pi + (-1)^n i \ln(\sqrt{2}+1)$

۷۲- اگر $f(z) = z^4 - 2z^3 + z^2 - 12z + 20$ و C دایره $|z| = 5$ باشد آنگاه مقدار انتگرال $\int_C \frac{zf'(z)}{f(z)} dz$ (در جهت مثلثاتی) برابر

است با:

(۱) ۰

(۲) $4\pi i$

(۳) $2\pi i$

(۴) πi

۷۳- تابع f با ضابطه $f(z) = z^2 \left(\sin \frac{1}{z} - \cos \frac{1}{z} \right)$:

(۱) در $z=0$ تکینگی برداشتنی دارد.

(۲) در $z=0$ قطب دارد.

(۳) در $z=0$ تکینگی اساسی دارد.

(۴) در همسایگی محذوف (deleted) صفر کراندار است.

۷۴- فرض کنید $D \subset \mathbb{C}$ باز و همبند و $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ یک تابع تحلیلی روی D باشد. همچنین فرض کنید اعداد

حقیقی a و b و c وجود دارند به طوری که $a^2 + b^2 \neq 0$ و برای هر $z = x + iy \in D$ ، $au(x,y) + bv(x,y) = c$ ، آنگاه:

(۱) f روی D صفر است.

(۲) f روی D یک چند جمله‌ای درجه اول است.

(۳) f روی D ثابت است.

(۴) f روی D به صورت $f(z) = e^{g(z)}$ است که g تابعی تحلیلی و غیر ثابت است.

۷۵- مقدار انتگرال $\int_{|z|=1} \sin \bar{z} dz$ (در جهت مثلثاتی) کدام است؟

(۱) صفر

(۲) $2\pi i$

(۳) $-2\pi i$

(۴) ۱

-۷۶ یک مزدوج همساز برای $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ در حوزه $\mathbb{C} - \{0\}$ عبارتست از:

$$\frac{x}{x^2+y^2} \quad (۱)$$

$$\frac{-x}{x^2+y^2} \quad (۲)$$

$$\frac{y}{x^2+y^2} \quad (۳)$$

$$\frac{-y}{x^2+y^2} \quad (۴)$$

-۷۷ بسط لوران تابع $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$ در حوزه $|z| > 2$ حول مبدأ برابر است با:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n \quad (۱)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{z^{n+1}} \quad (۲)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n \quad (۳)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}} \quad (۴)$$

-۷۸ فرض کنید تابع حقیقی f بر $\mathbb{R}$ دارای مشتق پیوسته باشد و $F(x+iy) = f(x+y) - if(x-y)$ در این صورت:

(۱) روی خط $x = y$ مشتق پذیر است.

(۲) روی محور حقیقی مشتق پذیر است.

(۳) روی خط $x = -y$ مشتق پذیر است.

(۴) روی محور موهومی مشتق پذیر است.

-۷۹ مقدار انتگرال $\int_0^{2\pi} \sin(\exp i\theta) d\theta$ برابر است با:

$$\frac{2\pi}{\sin(1)} \quad (۱)$$

$$2\pi \cos(1) \quad (۲)$$

$$\frac{2\pi}{\cos(1)} \quad (۳)$$

$$2\pi \sin(1) \quad (۴)$$

۸۰- فرض کنید $f(z) = u + iv$ تابعی تام (همه جا تحلیلی) باشد و همواره $u^2 - v^2 < 1$. در این صورت تابع f :

(۱) یک چند جمله‌ای با درجه حداقل برابر یک است.

(۲) متناوب است ولی الزاماً ثابت نیست.

(۳) کراندار نیست.

(۴) ثابت است.

۸۱- بازای هر دو عدد گویای $a, b \in \mathbb{Q}$ ، تعریف می‌کنیم $a * b = \frac{ab}{20}$. در این صورت وارون ۷ در این نیم گروه برابر است با:

$$\frac{200}{7} \quad (1)$$

$$\frac{400}{7} \quad (2)$$

$$\frac{7}{400} \quad (3)$$

$$\frac{400}{14} \quad (4)$$

۸۲- اگر G یک گروه و H و K زیر مجموعه‌های G و L زیر گروهی از G باشد به طوری که $H \subseteq L$ ، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

$$HK = KH \quad (1)$$

$$L = H(L \cap K) \quad (2)$$

$$L \cap HK = H(L \cap K) \quad (3)$$

$$H \cap LK = L(H \cap K) \quad (4)$$

۸۳- تعداد عناصر مرتبه ۴ در گروه متقارن درجه (S_6) چند است؟

$$45 \quad (1)$$

$$90 \quad (2)$$

$$180 \quad (3)$$

$$360 \quad (4)$$

۸۴- تعداد عضوهای حلقه $\frac{\mathbb{Z}_7[x]}{(x^3+1)}$ برابر است با:

$$12 \quad (1)$$

$$8 \quad (2)$$

$$6 \quad (3)$$

$$4 \quad (4)$$

۸۵- چند گروه آبدی در حد یکریختی از مرتبه ۷۲۰۰ وجود دارد؟

$$12 \quad (1)$$

$$28 \quad (2)$$

$$150 \quad (3)$$

$$260 \quad (4)$$

۸۶- کدام گزاره در مورد گروه خارج قسمتی $G = \frac{Q}{Z}$ (Q اعداد گویا است) درست نیست؟
 (۱) مرتبه‌ی هر عضو G متناهی است.
 (۲) به ازای هر عدد صحیح مثبت n ، G دارای زیر گروه منحصر به فردی از مرتبه‌ی n است.
 (۳) هر زیر گروه متناهی G دوری است.
 (۴) هر زیر گروه محض G متناهی است.

۸۷- فرض کنید p و q دو عدد اول متمایز باشند، تعداد هم ریختی‌ها از گروه Z_p به گروه Z_q برابر است با:

- (۱) ۰
- (۲) ۱
- (۳) p
- (۴) q

۸۸- فرض کنید G گروهی از مرتبه ۱۲۵ است. کدام گزینه ممکن است یک زیر گروه نرمال G نباشد؟

- (۱) G'
- (۲) زیر گروه H به طوری که $|G:H| = 5$
- (۳) $G' \cap Z(G)$
- (۴) زیر گروه H به طوری که $|H| = 5$

۸۹- فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و یکدار با حداقل دو ایده‌آل ماکسیمال متناهی باشد در این صورت کدام گزینه صحیح است؟
 (۱) R متناهی است.

- (۲) اشتراک این دو ایده‌آل ماکسیمال صفر است.
- (۳) ضرب این دو ایده‌آل ماکسیمال صفر است.
- (۴) هر کدام از این دو ایده‌آل ماکسیمال پوچتوان هستند.

۹۰- $R[x]$ حلقه چند جمله‌ایها با ضرایب حقیقی فرض می‌شود. تعداد میدانها با تقریب یکریختی که به شکل $\frac{R[x]}{I}$ هستند و I

ایده‌آل ماکسیمال $R[x]$ است، برابر است با:

- (۱) بینهایت
- (۲) ۱
- (۳) ۴
- (۴) ۲

۹۱- اگر $a_n = 2(-1)^{n-2[\frac{n}{2}]} + 3(-1)^n$ ، که در آن $[.]$ به معنی جزء صحیح است، مقدار $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ کدام است؟

(۱) -۴

(۲) ۰

(۳) ۴

(۴) ۶

۹۲- با فرض $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ و $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}$ (۲) $e - s_n > \frac{2}{n!n}$ (۳) $e - s_n = \frac{1}{n!n}$ (۴) $e - s_n \geq \frac{1}{n!n}$

۹۳- فرض کنید $Q = \{r_n : n = 1, 2, \dots\}$ و $f_n(x) = \begin{cases} x & x \in \{r_1, \dots, r_n\} \\ x^2 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$ ، $I = [0, 1]$ و به ازای هر x در I ، $f(x)$ حد دنباله $\{f_n(x)\}$ باشد. مجموعه نقاط پیوستگی f در I کدام است؟

(۱) $\{0, 1\}$

(۲) تهی

(۳) I (۴) $I \cap Q^c$

۹۴- $\mathbb{R}$ را با متریک اقلیدسی در نظر می‌گیریم. اگر $E \subseteq \mathbb{R}$ نامشمارا باشد آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

(۱) E' نامشمار است.(۲) $E'' = (E')'$ حداکثر شمار است.(۳) $E'' = (E')'$ نامشمار است.

(۴) گزاره‌های ۱ و ۳ هر دو صحیح هستند.

۹۵- فرض کنیم A و B دو زیر مجموعه چگال در فضای متریک (X, d) باشند. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

(۱) مجموعه $A \cap B$ در X بسته نیست.(۲) اگر B باز باشد آنگاه $A \cap B$ در X چگال است.(۳) اگر $A \cap B$ در X چگال باشد آنگاه B باز است.

(۴) گزاره‌های ۱ و ۲ هر دو صحیح هستند.

-۹۶

در صورتی که C مجموعه کانتور باشد آنگاه کدام گزینه صحیح است؟(۱) مجموعه C نقطه درونی ندارد و با $\mathbb{R}$ هم ارز است.(۲) هر نقطه مجموعه C حدی است.(۳) مجموعه C فشرده است.

(۴) هر سه گزینه صحیح اند.

-۹۷

کدام مجموعه شماراست؟ ($\mathbb{R}$ و $\mathbb{N}$ را با متریک اقلیدسی در نظر می گیریم)(۱) $A = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ پیوسته}\}$ (۲) $A = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} \text{ ناپیوسته}\}$ (۳) $A = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} \text{ پیوسته}\}$ (۴) $A = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ناپیوسته}\}$

-۹۸

فرض کنید $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ پیوسته باشد و برای هر عدد طبیعی n مجموعه $\{x: f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ کراندار باشد. کدام

گزینه صحیح است؟

(۱) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ موجود است اما ممکن است $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ موجود نباشد.(۲) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ موجود است اما ممکن است $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ موجود نباشد.(۳) هر دو حد $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ موجود است.(۴) ممکن است هیچ یک از دو حد $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ موجود نباشد.

-۹۹

تابع f با ضابطه $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ را بر بازه $(0, \infty)$ در نظر بگیرید. در این صورت:(۱) توابع f و f' هر دو کراندار هستند.(۲) تابع f یکنواخت پیوسته نیست.(۳) برای هر $0 < a$ ، تحدید f به $(0, a]$ یکنواخت پیوسته است.(۴) به ازای هر $0 < a$ ، تابع f بر بازه $[a, \infty)$ یکنواخت پیوسته نیست.

-۱۰۰

فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مشتق پذیر و $x \in \mathbb{R}$ وجود نداشته باشد به طوری که $f(x) = f'(x) = 0$. در این صورت مجموعه $\{x: 0 \leq x \leq 1, f(x) = 0\}$

(۱) متناهی است.

(۲) نامتناهی است ولی در $[0, 1]$ چگال نیست.(۳) نامتناهی و در $[0, 1]$ بسته است.(۴) نامتناهی و در $[0, 1]$ چگال است.

۱۰۱- فرض کنید توابع حقیقی کراندار f و α روی بازه $[a, b]$ مفروض باشند به طوری که α صعودی باشد. در کدام حالت انتگرال

ریمان استیلت یس f نسبت به α همواره موجود نیست؟

- (۱) α در یک نقطه ناپیوسته باشد.
- (۲) f و α هر دو در یک نقطه از راست ناپیوسته باشند.
- (۳) f در یک نقطه ناپیوسته باشد.
- (۴) f و α هر دو در یک نقطه ناپیوسته باشند.

۱۰۲- فرض کنید $\int_a^b f d\alpha$ انتگرال ریمان استیلت یس بالای f نسبت به α باشد. مقدار این انتگرال بالایی برای

$f(x) = \alpha(x) = [x]$ و $a = 0$, $b = 10$ چقدر است؟

- (۱) ۱۰
- (۲) ۱۱
- (۳) ۴۵
- (۴) ۵۵

۱۰۳- کدام گزاره نادرست است؟

- (۱) $f(x) = e^{\sin x^2}$ نسبت به $\alpha(x) = -\cos x$ بر $[0, \frac{\pi}{4}]$ انتگرال ریمان استیلت یس دارد.
- (۲) $f(x) = \sin x + [x]$ بر $[-2, 2]$ نسبت به $\alpha(x) = \begin{cases} 0 & -2 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ انتگرال ریمان استیلت یس دارد.
- (۳) $f(x) = \sin[x] + x$ بر $[0, \frac{\pi}{4}]$ نسبت به $\alpha(x) = \sin x$ انتگرال ریمان استیلت یس دارد.
- (۴) $f(x) = \sin^2 x + [x]$ بر $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ نسبت به $\alpha(x) = \begin{cases} 0 & -\frac{2}{3} < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq \frac{2}{3} \end{cases}$ انتگرال ریمان استیلت یس دارد.

۱۰۴- فرض کنید $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ و تابع $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$ تعریف شود. در این صورت تابع f بر $[0, 1]$

- (۱) انتگرال پذیر ریمان و با تغییر کراندار است.
- (۲) با تغییر کراندار نیست و بر $[0, 1]$ انتگرال ریمان ندارد.
- (۳) با تغییر کراندار است ولی انتگرال پذیر ریمان نیست.
- (۴) با تغییر کراندار نیست ولی انتگرال پذیر ریمان است.

۱۰۵- فرض کنید بر بازه $[0, 1]$ ، $f_n(x) = nx^n$. دنباله توابع $\{f_n\}$ دارای کدام خاصیت است؟

- (۱) در $[0, 1]$ همگرایی نقطه‌وار است.
- (۲) روی $[0, 1]$ همگرایی یکنواخت است.
- (۳) در $[0, 1]$ همگرایی نقطه‌وار است.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx \quad (۴)$$

۱۰۶- فرض کنید $\{f_n\}$ یک دنباله از توابع باشد که بر بازه $[a, b]$ به تابع f همگرای یکنواخت است. کدام گزاره نادرست است؟

- (۱) اگر f_n ها پیوسته باشند آنگاه f نیز پیوسته است.
- (۲) اگر f_n ها بر $[a, b]$ انتگرال پذیر ریمان باشند آنگاه f نیز بر $[a, b]$ انتگرال پذیر ریمان است.
- (۳) اگر از مرتبه‌ای به بعد f_n ها کراندار باشند آنگاه f نیز کراندار است.
- (۴) اگر f_n ها بر $[a, b]$ مشتق پذیر باشند آنگاه f نیز بر $[a, b]$ مشتق پذیر است و $\{f'_n\}$ به تابع f' بر $[a, b]$ همگرای یکنواخت است.

۱۰۷- تابع $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2$

- (۱) فقط روی $[-1, 1]$ پیوسته است.
- (۲) فقط روی $(-1, 1)$ پیوسته است.
- (۳) روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.
- (۴) فقط در $x=0$ پیوسته است.

۱۰۸- فرض کنید سری‌های $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ بر بازه $S = (-r, r)$ همگرا باشند، که $r > 0$ و E را مجموعه نقاط x در S

بگیرید که دوسری فوق در آن نقاط برابر باشند. ضعیف‌ترین شرط برای آنکه الزاماً تساوی $a_n = b_n$ برای هر $n \geq 1$ برقرار باشد، کدام است؟

- (۱) E متناهی باشد.
- (۲) E ناشمارا باشد.
- (۳) E فشرده باشد.
- (۴) E شمارای نامتناهی باشد.

۱۰۹- فرض کنید توابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ و $g(x) = [x^2] + 1$ بر $[0, 1]$ تعریف شده‌اند. در این

صورت:

- (۱) تابع $f+g$ بر بازه $[0, 1]$ با تغییر کراندار است.
- (۲) تابع fg بر $[0, 1]$ با تغییر کراندار نیست.
- (۳) تابع f بر بازه $[0, 1]$ با تغییر کراندار است ولی $\frac{f}{g}$ بر این بازه با تغییر کراندار نیست.
- (۴) هیچ یک از توابع f و g بر $[0, 1]$ با تغییر کراندار نیستند.

۱۱۰- برای هر تابع با تغییر کراندار f بر $[0, 1]$ تعریف می‌کنیم $\alpha(f) = |f(0)| + v_f[0, 1]$ که $v_f[0, 1]$ تغییر کل تابع f بر $[0, 1]$ است. اگر $\beta(f) = \sup\{f(x) : x \in [0, 1]\}$ آنگاه کدام گزاره برای توابع با تغییر کراندار f و g بر $[0, 1]$ درست است؟

- (۱) $\beta(fg) \leq \beta(f)\alpha(g) - \beta(g)\alpha(f)$
- (۲) $\alpha(fg) = \beta(f)\alpha(g) + \alpha(f)\beta(g)$
- (۳) $\beta(f) \geq \alpha(f)$
- (۴) $\beta(f) \leq \alpha(f)$

۱۱۱- فرض کنید $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$ در فاصله‌های متساوی‌الفاصله به طول h در بازه $[1, 2]$ جدول بندی شده است. مقدار h

چقدر باشد تا قدر مطلق خطای ناشی از درونیایی خطی بین هر دو نقطه مجاور از 10^{-4} کمتر شود؟

۰/۰۲ (۱)

۰/۲ (۲)

۰/۰۳ (۳)

۰/۳ (۴)

۱۱۲- تابع جدولی زیر مفروض است:

x_i	۰	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۳
f_i	۱	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

مقدار تقریبی $\int_0^2 f(x)dx$ با روش سیمسون مرکب کدام است؟

$\frac{17}{12}$ (۱)

$\frac{15}{8}$ (۲)

$\frac{25}{18}$ (۳)

$\frac{4}{3}$ (۴)

۱۱۳- در فرمول انتگرال‌گیری عددی $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx \approx \alpha f(x_1)$ ، مقادیر α و x_1 را چقدر باشند تا روش تقریبی دارای بالاترین

درجه دقت برای چند جمله‌ای‌ها باشد، و درجه دقت k مربوط به بالاترین درجه کدام است؟

$k=2$ ، $x_1 = \frac{1}{2}$ ، $\alpha=1$ (۱)

$k=2$ ، $x_1 = \frac{1}{2}$ ، $\alpha=2$ (۲)

$k=1$ ، $x_1 = \frac{1}{3}$ ، $\alpha=1$ (۳)

$k=1$ ، $x_1 = \frac{1}{3}$ ، $\alpha=2$ (۴)

۱۱۴- برای معادله $y' = 2y$ با شرط اولیه $y(x_0) = y_0$ ، روش رانگه- کوتای مرتبه ۲ را با طول گام h به کار می‌بریم. مقدار y_n ، جواب تقریبی معادله در نقطه $x_n = x_0 + nh$ کدام است؟

$$y_n = (h^2 + 2h)^n y_0 \quad (۱)$$

$$y_n = (h^2 + 2h + 2)^n y_0 \quad (۲)$$

$$y_n = (2h^2 + h + 1)^n y_0 \quad (۳)$$

$$y_n = (2h^2 + 2h + 1)^n y_0 \quad (۴)$$

۱۱۵- فرض کنید دنباله حاصل از روش تکراری $x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 3ax_n}{3x_n^2 + a}$ ، $a > 0$ ، همگرا به ریشه معادله $f(x) = x^3 - a$ باشد.

بیشترین مرتبه همگرایی روش چقدر است؟

$$۳ \quad (۱)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$(۴) \text{ حداقل } ۲$$

۱۱۶- فرض کنید α دقیقاً ریشه مرتبه سوم معادله $f(x) = 0$ باشد. در این صورت، مقدار عبارت $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha}$ وقتی

$\{x_n\}$ دنباله حاصل از روش نیوتن باشد، کدام است؟

$$0 \quad (۱)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۳)$$

$$۱ \quad (۴)$$

۱۱۷- فرض کنید Δ عملگر تفاضل پیشرو باشد. در این صورت، $\Delta[f(x)g(x)]$ برابر است با:

$$f(x).\Delta g(x) + \Delta f(x).g(x+h) \quad (۱)$$

$$f(x).\Delta g(x) + f(x).\Delta g(x+h) \quad (۲)$$

$$f(x).\Delta g(x) - \Delta f(x).g(x+h) \quad (۳)$$

$$f(x).\Delta g(x) - f(x).\Delta g(x+h) \quad (۴)$$

۱۱۸- تابع جدولی زیر را در نظر بگیرید. مقدار تقریبی $f(-1/5)$ با استفاده از چند جمله‌ای درونیاب درجه دوم برابر است با:

x_i	-۲	-۱	۰	۱
f_i	۱	۰	۲	-۱

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \quad (۱) \\ & \frac{3}{4} \quad (۲) \\ & \frac{1}{8} \quad (۳) \\ & \frac{3}{8} \quad (۴) \end{aligned}$$

۱۱۹- اگر $S_1 = \sum_{i=0}^n x_i$ ، $S_2 = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^n x_i x_j$ ، $S_3 = \sum_{\substack{i,j,k=0 \\ i \neq j \neq k}}^n x_i x_j x_k$ و $S_n = x_0 x_1 \dots x_n$ و تابع $f(x) = x^{n+1}$ را در

نقاط $x_0, \dots, x_n$ درونیابی کنیم، آنگاه ضریب x^{n-1} در تابع درونیاب برابر است با:

$$\begin{aligned} & -S_1 \quad (۱) \\ & S_1 \quad (۲) \\ & -S_2 \quad (۳) \\ & S_2 \quad (۴) \end{aligned}$$

۱۲۰- برای محاسبه $1 - \cos x$ در نزدیکی صفر از چه عبارتی استفاده می‌کنید؟

$$\begin{aligned} & 0 \quad (۱) \\ & \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \quad (۲) \\ & x^2 - \frac{x^2}{2} \quad (۳) \\ & \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} \quad (۴) \end{aligned}$$

۱۲۱- فرض کنید A ماتریسی مربعی روی میدان Z_7 باشد به طوری که چند جمله‌ای مشخصه آن $(x+3)^6(x-2)^5$ است در این صورت $\text{tr}(A)$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۴

(۳) ۲

(۴) ۶

۱۲۲- فرض کنید $A \in M_n(R)$ و $A = A^T$. اگر $X, Y \in R^n$ بردارهای ویژه A باشند به طوری که $AX = 2X$ و $AY = 3Y$ کدام گزینه نادرست است؟

(۱) $\text{tr}(A) > 0$ (۲) ۹ یک مقدار ویژه A^2 است.(۳) ضرب داخلی X و Y صفر است.(۴) X و Y مستقل خطی‌اند.

۱۲۳- در صفحه، S تبدیل تقارن نسبت به محور x ها و T تبدیل تقارن نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم فرض می‌شود. ماتریس تبدیل ST نسبت به پایه استاندارد کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(۲) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(۳) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(۴) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

۱۲۴- فرض کنید V یک فضای برداری ۱۰ بعدی و $f: V \rightarrow V$ یک تبدیل خطی باشد به نحوی که $\text{Ker } f = W_1 \cap W_2$ که در آن W_1 و W_2 دو ابر صفحه متمایز V هستند. در این صورت کدام یک صحیح است؟

(۱) $V = f(W_1) + f(W_2)$

(۲) هر پایه $\text{ker } f$ را می‌توان با افزودن یک بردار مناسب به پایه‌ای برای V تبدیل کرد.(۳) $f(V)$ یک ابر صفحه V است.(۴) $f(W_1)$ و $f(W_2)$ ابر صفحه‌های $f(V)$ هستند.

۱۲۵- تبدیل خطی $T(f(x)) = f(x-2)$ از فضای چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه ۳ به خودش را در نظر بگیرید. بردارهای ویژه T کدام است؟

(۱) چند جمله‌ای‌های ناصفر با درجه حداکثر ۱

(۲) چند جمله‌ای‌های ناصفر با درجه حداکثر ۲

(۳) چند جمله‌ای‌های ثابت ناصفر

(۴) چند جمله‌ای‌های ناصفر با درجه حداکثر ۳

۱۲۶- فرض کنید V فضای برداری ماتریس‌های 2×2 با درایه‌های حقیقی باشد. در این صورت بعد تصویر تبدیل خطی

$$T: V \rightarrow V \text{ با ضابطه } T(A) = A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \text{ کدام است؟}$$

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۱۲۷- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. مقدار $A^5 - 2A^3 + 2A^2 + I$ کدام است؟

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

۱۲۸- اگر A ماتریس 4×4 با مقادیر ویژه $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$ باشد در این صورت $\text{tr}(I + A^2)^{-1}$ کدام است؟

$$\frac{75}{60} \quad (1)$$

$$\frac{77}{60} \quad (2)$$

$$16 \quad (3)$$

$$14 \quad (4)$$

۱۲۹- فرض کنید $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک تبدیل خطی با ضابطه $T(x, y) = (2x + 3y, x - y)$ است. اگر

$B = \{(1, -1), (1, -2)\}$ یک پایه مرتب برای $\mathbb{R}^2$ باشد، ماتریس تبدیل خطی T^{-1} نسبت به این پایه کدام است؟

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -1 \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

۱۳۰- چند جمله‌ای مینیمال ماتریس حقیقی A عبارتست از $x^3 + 3x + 4$. در این صورت به عنوان یک تبدیل خطی روی $\mathbb{R}^n$:

(۱) A یک زیر فضای یک بعدی را ثابت نگه می‌دارد.

(۲) مجموع مقادیر ویژه حقیقی A مساوی صفر است.

(۳) فقط بردار صفر را ثابت نگه می‌دارد.

(۴) مجموع مقادیر ویژه A برابر ۴ است.