

دانلود کتاب، جزوه و مقاله تخصصی ریاضی در

سایت ریاضیات ایران

بزرگترین سایت ریاضی

517

C

نام  
نام خانوادگی  
محل امضاء

<http://IRmath.com>

صبح جمعه  
۸۹/۱۱/۲۹



اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.  
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۰

مجموعه ریاضی - کد ۱۲۰۸

مدت پاسخگویی: ۲۷۰ دقیقه

IRmath

تعداد سؤال: ۱۲۰

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

| ردیف | مواد امتحانی     | تعداد سؤال | از شماره | تا شماره |
|------|------------------|------------|----------|----------|
| ۱    | توابع مختلط      | ۲۰         | ۱        | ۲۰       |
| ۲    | جبر (۱)          | ۲۰         | ۲۱       | ۴۰       |
| ۳    | آنالیز ریاضی (۱) | ۲۰         | ۴۱       | ۶۰       |
| ۴    | آنالیز ریاضی (۲) | ۲۰         | ۶۱       | ۸۰       |
| ۵    | آنالیز عددی (۱)  | ۲۰         | ۸۱       | ۱۰۰      |
| ۶    | جبر خطی          | ۲۰         | ۱۰۱      | ۱۲۰      |

بهمن ماه سال ۱۳۸۹

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی باشد.

۱- فرض کنید تابع تحلیلی و غیر ثابت  $f$  بر حوزه  $D$  در رابطه  $|f^r(z) - 1| < 1$  صدق کند. در این صورت:

$$\forall z \in D \quad \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Im} f(z) \quad (1)$$

$$\forall z \in D \quad \operatorname{Re} f(z) < \operatorname{Im} f(z) \quad (2)$$

$$(\forall z \in D \quad \operatorname{Re} f(z) > 0) \quad \text{یا} \quad (\forall z \in D \quad \operatorname{Re} f(z) < 0) \quad (3)$$

$$(\forall z \in D \quad \operatorname{Im} f(z) > 0) \quad \text{یا} \quad (\forall z \in D \quad \operatorname{Im} f(z) < 0) \quad (4)$$

۲- شعاع همگرایی سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{i}{n}\right)^n \left(\frac{z+i}{3}\right)^{n^r}$  کدام است؟

$$0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\infty \quad (3)$$

$$3 \quad (4)$$

۳- فرض کنید تابع  $f$  بر حوزه  $D$  تحلیلی باشد. در این صورت:

$$\left(\frac{\partial^r}{\partial x^r} + \frac{\partial^r}{\partial y^r}\right) |f(z)|^r = 4 |f'(z)|^r \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial^r}{\partial x^r} + \frac{\partial^r}{\partial y^r}\right) |f(z)|^r = 2 |f'(z)|^r \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial^r}{\partial x^r} + \frac{\partial^r}{\partial y^r}\right) |f(z)|^r = 2 |f'(z)| \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial^r}{\partial x^r} + \frac{\partial^r}{\partial y^r}\right) |f(z)|^r = |f'(z)|^r \quad (4)$$

۴- نگاشت  $w = \frac{1}{r} \left(z + \frac{1}{z}\right)$  دایره  $|z| = r$  ( $r \neq 1$ ) را به چه خمی می‌نگارد؟

$$|z| = \frac{1}{r} \left|r - \frac{1}{r}\right| \quad \text{دایره} \quad (1)$$

$$|z| = \frac{1}{r} \left(r + \frac{1}{r}\right) \quad \text{دایره} \quad (2)$$

$$b = \frac{1}{r} \left|r - \frac{1}{r}\right| \quad \text{و} \quad a = \frac{1}{r} \left(r + \frac{1}{r}\right) \quad \text{بیضی به مرکز مبدأ و نیم قطرهای} \quad (3)$$

$$\text{بازه } [-1, 1] \quad \text{بر روی محور حقیقی} \quad (4)$$

۵- مقدار انتگرال  $\int_{|z|=2} \frac{\sin \frac{1}{z}}{z^2-1} dz$  برابر است با:

(۱)  $-2\pi i \sin 1$

(۲) صفر

(۳)  $2\pi i \sin 1$

(۴)  $\pi i \sin 1$

۶- فرض کنید  $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$  ( $z \neq 0$ ) و  $f(0) = 1$ . شعاع دایره همگرایی بسط تیلور تابع  $f$  حول نقطه  $z_0 = 1$  کدام است؟

(۱) ۱

(۲)  $\sqrt{1+4\pi^2}$

(۳)  $\infty$

(۴)  $2\pi$

۷- فرض کنید  $f(z) = \frac{z}{z^2 - 4z + 3}$ . برای  $|z-1| > 2$  کدام گزینه صحیح است؟

(۱)  $f(z) = \frac{1}{z-1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{(z-1)^n}$

(۲)  $f(z) = -\frac{1}{2(z-1)} - \frac{2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n$

(۳)  $f(z) = -\frac{1}{2(z-1)} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{(z-1)^{n+1}}$

(۴)  $f(z) = \frac{1}{z-1} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{(z-1)^n}$

۸- فرض کنید توابع  $f$  و  $g$  بر حوزه  $D$  تحلیلی باشند و به ازاء هر  $z \in D$ ،  $|f(z)| = |g(z)|$  در این صورت به ازای هر  $z \in D$ :

$$|f'(z)| = |g'(z)| \quad (۱)$$

$$\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} g(z) \quad (۲)$$

$$e^{i \operatorname{Im} f(z)} = e^{i \operatorname{Im} g(z)} \quad (۳)$$

$$e^{f'(z)} = e^{g'(z)} \quad (۴)$$

۹- سری لورن تابع  $f(z) = \frac{e^{z-1}}{z^2-1}$  در حوزه  $(0 < |z-1| < 2)$  کدام است؟

$$f(z) = \frac{1}{2(z-1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{(z-1)^n}{(n+1-k)!} \quad (۱)$$

$$f(z) = \frac{1}{2(z-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{(z-1)^n}{(n+1-k)!} \quad (۲)$$

$$f(z) = \frac{1}{2(z-1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n+2} \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{(z-1)^n}{(n+2-k)!} \quad (۳)$$

$$f(z) = \frac{1}{2(z-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{(z-1)^n}{(n+1-k)!} \quad (۴)$$

۱۰- مانده تابع  $f(z) = \frac{z^2+1}{\sin z^2}$  در  $z=0$  کدام است؟

$$-2 \quad (۱)$$

$$-1 \quad (۲)$$

$$2 \quad (۳)$$

$$1 \quad (۴)$$

۱۱- مانده تابع  $f(z) = \frac{\sin 2z - 2 \sin z}{(\sin z - z) \sin z}$  در نقطه  $z=0$  برابر است با:

$$-24 \quad (۱)$$

$$0 \quad (۲)$$

$$24 \quad (۳)$$

$$1 \quad (۴)$$

۱۲- فرض کنید  $\{f_n\}$  دنباله‌ای از توابع تحلیلی و یک به یک بر حوزه  $D$  باشد که روی هر زیر مجموعه فشرده  $D$  به طور یکنواخت به تابع غیر ثابت  $f$  همگرا است. در این صورت:

- (۱)  $f'$  هیچ صفری در  $D$  ندارد.
- (۲)  $f$  هیچ صفری در  $D$  ندارد.
- (۳) اگر هر  $f_n$  در  $D$  صفر داشته باشد آنگاه  $f$  نیز در  $D$  صفر دارد.
- (۴) تعداد صفرهای  $f$  و  $f_n$  از مرتبه‌ای به بعد در  $D$  با هم برابرند.

۱۳- فرض کنید  $f$  و  $g$  دو تابع تام باشند که به ازای هر  $z$ ،  $|f(z)| \leq |g(z)|$ . در این صورت:

- (۱)  $\frac{f}{g}$  یک تابع گویای غیر ثابت است.
- (۲)  $f = cg$  که  $c$  یک عدد ثابت است.
- (۳) در درون هر خم ساده بسته تعداد صفرهای  $g$  و  $f + g$  با هم برابرند.
- (۴) در درون هر خم ساده بسته تعداد صفرهای  $f$  از تعداد صفرهای  $g$  بیشتر است.

۱۴- فرض کنید تابع  $f$  بر قرص بسته واحد  $|z| \leq 1$  تحلیلی باشد و به ازای هر  $z$  در دایره واحد،  $|f(z)| < 1$ .

در این صورت تابع  $f^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) بر قرص باز  $|z| < 1$  چند نقطه ثابت دارد؟

- (۱)  $n$  نقطه
- (۲) یک نقطه
- (۳) نامتناهی
- (۴) هیچ نقطه

۱۵- فرض کنید  $f$  تابعی بر  $\mathbb{C}$  باشد که هیچ نقطه تکین اساسی (حتی در  $\infty$ ) ندارد. در این صورت:

- (۱) نقطه‌های تکین  $f$  برداشتنی هستند.
- (۲) تابع  $f$  به صورت عکس یک تابع تحلیلی روی  $\mathbb{C}$  است.
- (۳) هر بسط  $f$  به صورت سری توانی دارای تعدادی متناهی جمله است.
- (۴) تعداد نقطه‌های تکین  $f$  متناهی است.

۱۶- تعداد صفرهای چند جمله‌ای  $f(z) = z^2 + 5z^2 - z - 2$  در قرص باز واحد کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۳
- (۳) ۷
- (۴) ۵

۱۷- مقدار انتگرال  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$  کدام است؟

$$(1) \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{\pi}{2^{2n+1}}$$

$$(2) \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$(3) \frac{(n)!}{2(2n)!} \frac{\pi}{2^{2n}}$$

$$(4) \frac{(2n)!}{n!} \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

۱۸- فرض کنید  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  دارای شعاع همگرایی ۱ باشد و  $\max_{|z|=1} |f(z)| = 1$ . در این صورت اگر  $f(z_0) = 0$  آنگاه:

$$(1) |z_0| \leq \frac{|a_0|}{2+|a_0|}$$

$$(2) |z_0| \geq \frac{|a_0|}{2+|a_0|}$$

$$(3) |z_0| \leq \frac{|a_0|}{1+|a_0|}$$

$$(4) |z_0| \geq \frac{|a_0|}{1+|a_0|}$$

۱۹- فرض کنید  $f$  روی قرص باز واحد تحلیلی باشد. اگر به ازاء هر عدد طبیعی  $n$ ،  $f(\frac{1}{n+1})$  حقیقی باشد آنگاه:

(۱) به ازاء هر عدد طبیعی  $n$ ،  $f^{(n)}(0)$  حقیقی است.

$$(2) f(0) = 0$$

(۳) به ازاء هر عدد طبیعی  $n$ ،  $f^{(2n-1)}(0)$  حقیقی است و ممکن است  $f^{(2n)}(0)$  حقیقی نباشد.

(۴) به ازاء هر عدد طبیعی  $n$ ،  $f^{(2n)}(0)$  حقیقی است و ممکن است  $f^{(2n-1)}(0)$  حقیقی نباشد.

۲۰- فرض کنید تابع غیر ثابت  $f$  در  $0 < |z - z_0| < r$  تحلیلی باشد. اگر  $z_0$  نقطه انباشتگی صفرهای  $f$  باشد:

آنگاه تابع  $f$  در نقطه  $z_0$ :

(۱) قطب دارد.

(۲) تحلیلی است.

(۳) تکین اساسی دارد.

(۴) تکین برداشتنی دارد.

- ۲۱- فرض کنید  $G$  گروهی ۲۷ عضوی باشد در این صورت کدام گزینه صحیح است؟  
 (۱)  $G = G'$   
 (۲)  $G$  گروهی آبلی است.  
 (۳)  $G$  گروهی غیر آبلی است.  
 (۴) گروه  $Z(G)$  نابدیهی است.
- ۲۲- فرض کنید  $\varphi: G \rightarrow H$  یک همریختی باشد و  $|H| = ۲۵$  و  $|G| = ۳۶$ . در این صورت کدام گزینه صحیح است؟  
 (۱)  $\ker \varphi = ۱$   
 (۲)  $\ker \varphi = G$   
 (۳)  $\ker \varphi$  آبلی است.  
 (۴)  $\ker \varphi = H$
- ۲۳- اگر  $G$  گروهی دلخواه باشد که  $G = Z(G)G'$  در این صورت کدام گزینه صحیح است؟  
 (۱)  $G' = G''$   
 (۲)  $G$  گروهی آبلی است.  
 (۳)  $G'$  گروهی آبلی است.  
 (۴)  $\frac{G}{Z(G)}$  گروهی آبلی است.
- ۲۴- گروه خودریختی‌های داخلی  $S_p \times \mathbb{Z}_p$  با کدام گزینه یکرخت است؟  
 (۱)  $S_p$   
 (۲)  $\mathbb{Z}_p$   
 (۳)  $S_p \times \mathbb{Z}_p$   
 (۴)  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$
- ۲۵- فرض کنید  $G$  یک گروه دلخواه و  $H$  گروهی آبلی باشد. اگر  $f: G \rightarrow H$  یک همریختی باشد کدام گزینه صحیح است؟  
 (۱)  $G' \subseteq \ker f$   
 (۲)  $G'$  گروهی آبلی است.  
 (۳)  $\ker f$  گروهی آبلی است.  
 (۴)  $G$  گروهی آبلی است.
- ۲۶- فرض کنید  $G$  گروهی ۱۰ عضوی است در این صورت کدام گزینه صحیح است؟  
 (۱)  $G$  با زیر گروهی از  $\mathbb{Z}_{10}$  یکرخت است.  
 (۲)  $G$  با زیر گروهی از  $\mathbb{Z}_{100}$  یکرخت است.  
 (۳)  $G$  با زیر گروهی از  $S_{10}$  یکرخت است.  
 (۴)  $G$  با زیر گروهی از  $S_p$  یکرخت است.
- ۲۷- فرض کنید  $R$  یک حلقه باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم:  

$$N(R) = \{x \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}; x^n = 0\}$$
  
 تعداد اعضای  $N(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}_8)$  کدام است؟ (  $\mathbb{Q}$  حلقه اعداد گویا)  
 (۱) ۳  
 (۲) ۴  
 (۳) ۸  
 (۴) ۶
- ۲۸- تعداد عناصر مرتبه  $p^m$  در گروه دوری مرتبه  $p^n$  چند تا است؟ (  $p$  عدد اول است و  $0 < m < n$  ).  
 (۱)  $p^{n-m}$   
 (۲)  $p^m - p^{m-1}$   
 (۳)  $p^n - p^m$   
 (۴)  $p^n - p^{m-1}$

۲۹- فرض کنید  $R$  یک حلقه،  $I$  ایده‌آل چپ حلقه  $R$  و  $J$  ایده‌آل راست حلقه  $R$  باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

- (۱)  $IJ = I \cap J$   
 (۲)  $I \cap J$  ایده‌آلی دو طرفه از  $R$  است.  
 (۳)  $IJ$  ایده‌آلی دو طرفه از  $R$  است.  
 (۴)  $I + J$  ایده‌آلی دو طرفه از  $R$  است.

۳۰- کدام عدد نمی‌تواند مرتبه یک عنصر گروه  $S_{10}$  باشد؟

- (۱) ۱۲  
 (۲) ۳۰  
 (۳) ۲۸  
 (۴) ۲۱

۳۱- فرض کنید  $G$  یک گروه و  $H$  زیر گروه  $G$  باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

- (۱)  $Z(H) \triangleleft G$   
 (۲)  $Z(H)$  زیرگروهی از  $Z(G)$  است.  
 (۳)  $Z(H) = H \cap Z(G)$   
 (۴)  $H \cap Z(G) \triangleleft G$

۳۲- اگر  $G$  یک گروه دوری از مرتبه  $p^5$  ( $p$  یک عدد اول) باشد آنگاه مرتبه گروه خودریختی‌های  $G$  برابر است با:

- (۱)  $p^5$   
 (۲)  $p^5 - p^4$   
 (۳)  $p^5 - p^3$   
 (۴)  $p^5 - p$

۳۳- فرض کنید  $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -2b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$  را با جمع و ضرب معمولی ماتریسی در نظر بگیرید. در این صورت در مورد  $S$

- چه می‌توان گفت؟  
 (۱)  $S$  حلقه نیست.  
 (۲)  $S$  تحت ضرب گروه است.  
 (۳)  $S$  حلقه‌ای با سه ایده‌آل است.  
 (۴)  $S$  یک میدان است.

۳۴- به ازای چه عناصر  $a \in \mathbb{Z}_7$  حلقه  $\frac{\mathbb{Z}_7[x]}{(x^3 + x^2 + ax + 1)}$  میدان است؟

- (۱)  $a = 0$   
 (۲)  $a \in \{1, 2\}$   
 (۳)  $a = 2$   
 (۴)  $a = 1$

۳۵- فرض کنید  $G$  یک گروه است که  $|G| = 140$  و  $N$  زیر گروه نرمالی از  $G$  باشد به طوری که  $|N| = 14$ . فرض کنید

- $g \in G$  و  $o(g) = 7$ . در این صورت کدام گزاره صحیح است؟  
 (۱)  $g \in N$   
 (۲)  $G$  عنصری از مرتبه ۵ ندارد.  
 (۳)  $N$  دوری است.  
 (۴)  $g \notin N$

۳۶- فرض کنید  $G$  یک گروه است و  $a, b \in G$ . کدام گزاره درست نمی‌باشد؟

- (۱)  $o(ab) = o(ba)$   
 (۲)  $o(a) = o(b^{-1}ab)$   
 (۳) اگر  $a$  و  $b$  از مرتبه متناهی باشند آنگاه  $ab$  نیز از مرتبه متناهی است.  
 (۴) اگر  $a$  تنها عضو از مرتبه ۲ در  $G$  باشد آنگاه  $a \in Z(G)$ .

۳۷- کدام گزینه یگريختی حلقه‌ای نمی‌باشد؟

$$\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7 \cong \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_7 \right\} \quad (۲)$$

$$\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_7 \quad (۱)$$

$$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_n \quad (۴)$$

$$\mathbb{Z}(\sqrt{2}) \cong \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\} \quad (۳)$$

۳۸- چند گروه متناهی وجود دارد که دقیقاً ۳ ردهٔ تزویجی داشته باشد به طوری که حداقل ۲ ردهٔ تزویجی از آن یک عضوی باشند؟

(۲) ۴

(۱) ۱

(۴) ۲

(۳) ۳

۳۹- فرض کنید  $|G| = 2m$  که  $m$  عددی فرد است. فرض کنید  $k$  تعداد رده‌های تزویجی  $G$  باشد و  $k > m$ . در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

$$|Z(G)| = 1 \quad (۲)$$

$$Z(G) = G' \quad (۱)$$

(۴) هر عضو غیرهمانی  $G$  از مرتبهٔ ۳ است.

$$|Z(G)| \geq 3 \quad (۳)$$

۴۰- فرض کنید  $G$  گروهی متناهی باشد و به ازای هر  $x \in G$ ،  $y \in G$  موجود باشد به طوری که  $x = y^2$ . در این صورت کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

(۲)  $G$  گروه بدیهی است.

(۱) مرتبهٔ  $G$  زوج است.

(۴) مرتبهٔ  $G$  فرد است.

(۳)  $G$  دوری است.

۴۱- فرض کنید  $x_1 > \sqrt{2}$  و به ازای هر  $n$ ،  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right)$ . در این صورت:

$$(1) \lim x_n = \sqrt{2}$$

(۲) دنباله  $\{x_n\}$  حد ندارد.

$$(3) \lim x_n = -\sqrt{2}$$

(۴) دنباله  $\{x_n\}$  واگرایی به  $+\infty$  است.

۴۲- فرض کنید  $X$  و  $Y$  فضاهای متریک باشند و  $f: X \rightarrow Y$  تابعی پیوسته و یک به یک باشد. در این صورت تابع

$$f^{-1}: f(X) \rightarrow X$$

(۱) پیوسته است اگر  $X$  کران دار باشد.

(۲) یکنواخت پیوسته است.

(۳) پیوسته است اگر  $X$  فشرده باشد.

(۴) تابعی کران دار است ولی ممکن است پیوسته نباشد.

۴۳- فرض کنید  $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n\sqrt{2}} - \frac{(-1)^m}{(2m-1)\sqrt{2}} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$  و  $\alpha = \sup A$  و  $\beta = \inf A$ . در این صورت:

$$(1) \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(2) \beta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(3) \beta = -\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}, \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$(4) \beta = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۴۴- مقدار  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)(n+2) \cdots (n+n)]^{\frac{1}{n}}}{n}$  برابر است با:

- (۱)  $\frac{e}{2}$   
(۲)  $\frac{2}{e}$   
(۳)  $\frac{e}{4}$   
(۴)  $\frac{4}{e}$

۴۵- بازه همگرایی سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$  کدام است؟

- (۱)  $[-e, e]$   
(۲)  $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$   
(۳)  $(-e, e)$   
(۴)  $[-e, e)$

۴۶- فرض کنید  $(X, d)$  فضای متریک گسسته باشد. کدام گزینه صحیح نمی باشد؟

- (۱) هر  $E \subseteq X$  باز است.  
(۲) برای هر  $E \subseteq X$  داریم  $E' = E$ .  
(۳) هر  $E \subseteq X$  بسته است.  
(۴) برای هر  $E \subseteq X$  داریم  $\bar{E} = E^\circ$ .

۴۷- اگر  $(X, d)$  یک فضای متریک و  $A \subseteq X$  فشرده و  $B \subseteq X$  باز باشد آنگاه:

- (۱)  $A \cup \bar{B}$  فشرده است.  
(۲)  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  فشرده است.  
(۳)  $A \setminus \bar{B}$  فشرده است.  
(۴)  $\bar{A}^\circ \setminus B$  فشرده است، که در آن  $A^\circ$  مجموعه نقاط درونی  $A$  است.

۴۸- فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متریک و  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$  دنباله‌ای از مجموعه‌های ناتهی در  $X$  باشد به طوری که

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots \quad \text{و} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$$

(۱)  $I_1$  فشرده و بقیه  $I_n$  ها بسته باشند.

(۲)  $I_n$  ها باز و کراندار باشند.

(۳)  $I_n$  ها بسته و کراندار باشند.

(۴) هیچ کدام

۴۹- فرض کنید  $A$  مجموعه‌ای همبند در یک فضای متریک و  $B \subseteq A'$  ( $A'$  مجموعه نقاط حدی  $A$  است). در این صورت، کدام مجموعه همبند است؟

(۱)  $A^\circ$

(۲)  $\overline{A} - B$

(۳)  $\overline{A} - A$

(۴)  $A \cup B$

۵۰- کدام تابع بر دامنه داده شده یکنواخت پیوسته است؟

(۱)  $f(x) = e^x$  بر  $\mathbb{R}$

(۲)  $f(x) = e^{-x}$  بر  $[0, +\infty)$

(۳)  $f(x) = x^2$  بر  $\mathbb{R}$

(۴)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  بر  $(0, +\infty)$

۵۱- در  $\mathbb{R}$  با متریک اقلیدسی کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر  $E \subseteq \mathbb{R}$  و  $E \neq \emptyset$  حداکثر شمارا باشد آنگاه  $\mathbb{R} \setminus E$  ناهمبند است.

(۲) اگر  $E \subseteq \mathbb{R}$  و  $E^\circ = \emptyset$  آنگاه  $\mathbb{R} \setminus E$  در  $\mathbb{R}$  چگال است.

(۳) هر مجموعه همبند ناتهی بسته  $E$  در  $\mathbb{R}$  کامل (perfect) است ( $E' = E$ ).

(۴) اگر  $E \subseteq \mathbb{R}$  همبند و حداقل دو عضو داشته باشد آنگاه  $E' = \overline{E}$ .

۵۲- فرض کنید  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$  در این صورت دنباله  $\{a_n\}$ :

(۱) یکنوا و کراندار است.

(۲) یکنوا نیست ولی کراندار است.

(۳) یکنواست ولی کراندار نیست.

(۴) هیچ زیر دنباله همگرایی ندارد.

۵۳- سری  $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\alpha} - 1)$  همگراست اگر و تنها اگر:

(۱)  $\alpha < -1$

(۲)  $\alpha < 0$

(۳)  $-1 \leq \alpha$

(۴)  $0 < \alpha < 1$

۵۴- فرض کنید ضرایب سری توانی  $\sum a_n z^n$  اعداد صحیحی باشند که تعداد نامتناهی از آنها ناصفرند. در این صورت:

(۱) سری در  $(-\infty, +\infty)$  همگراست.

(۲) شعاع همگرایی آن حداکثر یک است.

(۳) شعاع همگرایی آن حداقل یک است.

(۴) سری فقط در  $x = 0$  همگراست.

۵۵- فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متریک،  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع پیوسته و  $E \subseteq X$  همبند باشد. در این صورت:

(۱) اگر  $E$  بسته باشد آنگاه  $f(E)$  یک بازه بسته در  $\mathbb{R}$  است.

(۲) اگر  $E$  باز باشد آنگاه  $f(E)$  یک بازه باز در  $\mathbb{R}$  است.

(۳) اگر  $f(E)$  حداکثر شمارا باشد آنگاه  $f|_E$  ثابت است.

(۴)  $f^{-1}(f(E))$  همبند است.

۵۶- فرض کنید  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی مشتق پذیر باشد. در این صورت  $f'$

(۱) پیوسته است.

(۲) کران دار است.

(۳) یکنوا است.

(۴) دارای ویژگی مقدار میانی است.

۵۷- اگر تابع  $f: [\alpha, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته و بر  $(\alpha, \infty)$  مشتق پذیر باشد و  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(\alpha)$ ، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f'(x) = 0 \quad (۱)$$

(۲) عددی مانند  $c$  در  $(\alpha, \infty)$  هست که  $f'(c) = 0$

(۳) تابع  $f$  بر  $(\alpha, \infty)$  یکنواست.

(۴)  $f$  بر  $[\alpha, \infty)$  بیکران است.

۵۸- تابع  $f$  با ضابطه زیر تعریف می شود:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x & x \in \mathbb{Q} \\ x^2 + x + 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

در این صورت:

(۱) تابع  $f$  در تمام نقاط گویا پیوسته است.

(۲) تابع  $f$  در مبدأ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست.

(۳) مجموعه نقاط ناپیوستگی  $f$  ناشمار است.

(۴) تابع  $f$  همه جا مشتق چپ و راست دارد.

۵۹- فرض کنید تابع حقیقی  $f$  بر بازه  $[a, b]$  تعریف شده باشد. گوئیم  $f$  در شرط لیپ شیتس از مرتبه  $\alpha > 0$  بر  $[a, b]$  صدق

می کند در صورتی که عددی ثابت مانند  $A$  وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر  $x, y$  در  $[a, b]$ ،

$$|f(x) - f(y)| \leq A |x - y|^\alpha$$

(۱)  $\sqrt{x}$  بر  $[0, 1]$  در شرط لیپ شیتس از مرتبه  $\alpha$  به ازای  $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$  صدق می کند.

(۲)  $\sqrt{x}$  بر  $[0, 1]$  در شرط لیپ شیتس از مرتبه  $\alpha$  به ازای  $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$  صدق می کند.

(۳) عدد  $\alpha < 1$  وجود دارد به قسمی که  $\sqrt{x}$  در شرط لیپ شیتس از مرتبه  $\alpha$  بر  $[0, 1]$  صدق می کند.

(۴) هیچ  $\alpha > 0$  وجود ندارد که  $\sqrt{x}$  در شرط لیپ شیتس از مرتبه  $\alpha$  بر  $[0, 1]$  صدق کند.

۶۰- کدام گزینه درست نیست؟

- (۱) اگر تابع حقیقی  $f$  بر  $\mathbb{R}$  مشتق پذیر باشد آنگاه  $f$  بر  $\mathbb{R}$  در شرط لیپ شیتس از مرتبه اول صدق می کند.
- (۲) اگر  $f$  یک تابع حقیقی پیوسته و یک به یک بر یک بازه باشد آنگاه  $f$  اکیداً یکنوا است.
- (۳) اگر  $X$  و  $Y$  فضاهای متریک و  $K \subseteq X$  فشرده و  $f: K \rightarrow Y$  یک به یک و پیوسته باشد آنگاه  $f^{-1}$  بر  $f(K)$  پیوسته است.
- (۴) تابعی وجود دارد که فقط در دو نقطه پیوسته است ولی در یکی از این نقاط مشتق دارد و در دیگری مشتق ندارد.

۶۱- فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  یکنواخت پیوسته باشد و  $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$  در این صورت دنباله  $\{f_n\}$

(۱) به طور نقطه‌ای همگراست ولی این همگرایی یکنواخت نیست.

(۲) یکنواخت کراندار است.

(۳) فقط در بازه‌های کراندار یکنواخت همگراست.

(۴) یکنواخت همگراست.

۶۲- فرض کنید  $f$  و  $\alpha$  بر  $[a, b]$  توابعی کراندار،  $\alpha$  صعودی و  $c$  نقطه ثابتی از  $(a, b)$  باشد. در این صورت:

(۱) اگر  $f$  در  $c$  ناپیوسته و  $\alpha$  در  $c$  پیوسته باشد یا  $f$  در  $c$  پیوسته و  $\alpha$  در  $c$  ناپیوسته باشد آنگاه  $f \in R(\alpha)$  بر  $[a, b]$ .

(۲) اگر  $f$  و  $\alpha$  هر دو در  $c$  از راست ناپیوسته باشند آنگاه  $f \notin R(\alpha)$  بر  $[a, b]$ .

(۳) فقط اگر  $f$  در  $c$  پیوسته و  $\alpha$  در  $c$  ناپیوسته باشد آنگاه  $f \in R(\alpha)$  بر  $[a, b]$ .

(۴) اگر  $f$  و  $\alpha$  هر دو در  $c$  ناپیوسته باشند آنگاه  $f \notin R(\alpha)$  بر  $[a, b]$ .

۶۳- اگر  $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-1, 0) \\ 1 & x \in [0, 1] \end{cases}$  و  $\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-1, 0) \\ 1 & x \in [0, 1] \end{cases}$  آنگاه:

(۱)  $f \notin R(\alpha)$

(۲)  $\int_{-1}^1 f d\alpha = 1$

(۳)  $\int_{-1}^1 f d\alpha = 2$

(۴)  $\int_{-1}^1 f d\alpha = 0$

۶۴- تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  داده شده به طوری که به ازای هر  $x \in \mathbb{R}$  داریم  $f(f(x)) = -x$ . در این صورت تابع  $f$ :

(۱) همه جا پیوسته است ولی همه جا مشتق پذیر نیست.

(۲) همه جا مشتق پذیر است.

(۳) حداقل در یک نقطه ناپیوسته است.

(۴) یکنواست.

۶۵- فرض کنید بر  $[0, 1]$ ،  $f_n(x) = \frac{\sin x (\cos x)^n}{1 + nx}$ . در این صورت دنباله  $\{f_n\}$  بر بازه  $[0, 1]$ :

- (۱) یکنواخت کران دار نیست.
- (۲) یکنواخت همگراست.
- (۳) یکنواخت همگرا نیست ولی زیر دنباله‌ای یکنواخت همگرا دارد.
- (۴) هیچ زیر دنباله یکنواخت همگرا ندارد.

۶۶- تابع پیوسته  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  مفروض است و در شرط  $\int_{-1}^1 g(x)f(x)dx = 0$  به ازای هر  $g$  از رده  $A$  از توابع حقیقی بر

$[-1, 1]$  صدق می‌کند. رده  $A$  کدام گزینه باشد تا صفر بودن تابع  $f$  را تضمین کند؟

- (۱) رده چند جمله‌ای‌ها
- (۲) رده توابع زوج
- (۳) رده توابع خطی (درجه اول)
- (۴) رده توابع فرد

۶۷- تابع  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  مفروض است. در این صورت:

- (۱) ممکن است  $|f|$  با تغییر کران دار باشد ولی  $f$  بر  $[a, b]$  با تغییر کران دار نباشد.
- (۲) اگر  $f$  با تغییر کران دار باشد پیوسته است.
- (۳) اگر  $f$  روی بازه باز  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد آنگاه  $f$  با تغییر کران دار است اگر و تنها اگر دارای مشتق کران دار باشد.
- (۴)  $f$  با تغییر کران دار است اگر و تنها اگر یکنوا باشد.

۶۸- اگر  $[x]$  «جزء صحیح  $x$ » باشد، مقدار  $\int_0^2 (x^2 + 1)d([x^2])$  کدام است؟

- (۱) ۲۰
- (۲) ۱۴
- (۳) ۱۷
- (۴) ۰

۶۹- فرض کنید  $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). کدام گزینه درست است؟

- (۱) هم دنباله  $\{f_n\}$  و هم دنباله  $\{f'_n\}$  بر بازه‌های کران‌دار یکنواخت همگرا هستند.
- (۲) دنباله  $\{f'_n\}$  بر بازه‌های کران‌دار و دنباله  $\{f_n\}$  بر  $\mathbb{R}$  یکنواخت همگراست.
- (۳) دنباله  $\{f_n\}$  فقط بر بازه‌های کران‌دار به  $|x|$  یکنواخت همگراست.
- (۴) دنباله  $\{f_n\}$  بر  $\mathbb{R}$  یکنواخت همگراست.

۷۰- سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$

- (۱) در برخی از نقاط همگرا نیست.
- (۲) بر  $[0, 1]$  یکنواخت همگراست ولی بر  $\mathbb{R}$  یکنواخت همگرا نیست.
- (۳) بر  $\mathbb{R}$  به طور نقطه‌ای همگراست ولی این همگرایی یکنواخت نیست.
- (۴) بر  $\mathbb{R}$  یکنواخت همگراست.

۷۱- فرض کنید بر بازه بسته  $[a, b]$ ،  $f_n(x) = \frac{[nx]}{n^2}$  و  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ . در این صورت:

- (۱) مجموعه ناپیوستگی‌های هر  $f_n$  متناهی است ولی مجموعه ناپیوستگی‌های  $f$  شماراست.
- (۲) سری  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  نه تنها بر  $[a, b]$  بلکه بر  $\mathbb{R}$  به طور یکنواخت به  $f$  همگراست.
- (۳) مجموعه ناپیوستگی‌های توابع  $f_n$  و  $f$  تمام اعداد گویای بازه  $[a, b]$  است.
- (۴) با اینکه  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  بر  $[a, b]$  یکنواخت همگراست اما  $\int_a^b f(x) dx$  موجود نیست.

۷۲- سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$

- (۱) در  $\mathbb{R}$  نقطه به نقطه و در بازه‌های کران‌دار یکنواخت همگراست.
- (۲) در  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  یکنواخت همگراست.
- (۳) در هر بازه بسته که در آن مضربی از  $2\pi$  وجود نداشته باشد، یکنواخت همگراست.
- (۴) در هر بازه‌ای مانند  $[a, b]$  یکنواخت همگراست.

۷۳- فرض کنید  $\{r_n\}$  دنباله اعداد گویای  $[0, 1]$  باشد و قرار دهید  $\alpha(x) = \sum_{r_n < x} \frac{1}{r_n}$ . اگر تابع  $f$  بر  $[0, 1]$  پیوسته باشد،

آن گاه  $\int_0^1 f d\alpha$  برابر است با:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{r_n}\right)(\alpha(r_{n+1}) - \alpha(r_n)) \quad (۱)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} f(r_n) \quad (۲)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n+1}}\right) f(r_n) \quad (۳)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n f\left(\frac{1}{r_n}\right) \quad (۴)$$

۷۴- فرض کنید دنباله  $\{f_n\}$  بر مجموعه  $E \subseteq \mathbb{R}$  به تابع  $f$  یکنواخت همگرا باشد. اگر  $f$ :

(۱) در نقطه‌ای مانند  $a$  از  $E$  ناپیوسته باشد، آنگاه مجموعه  $\{f_n\}$  در  $a$  ناپیوسته است:  $n$  نامتناهی است.

(۲) پیوسته باشد از مرتبه‌ای به بعد تمام  $f_n$  ها پیوسته‌اند.

(۳) در نقطه‌ای ناپیوسته باشد تمام  $f_n$  ها در آن نقطه ناپیوسته‌اند.

(۴) پیوسته باشد تمام  $f_n$  ها پیوسته‌اند.

۷۵- فرض کنید  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته با تعداد متناهی صفر باشد،  $f(a) = 0$  و  $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ . در این صورت

کدام گزینه در حالت کلی صحیح است؟

(۱) تعداد صفرهای  $g$  بیشتر از تعداد صفرهای  $f$  است.

(۲) تعداد صفرهای  $g$  بیشتر یا مساوی تعداد صفرهای  $f$  است.

(۳) تعداد صفرهای  $g$  کمتر از تعداد صفرهای  $f$  است.

(۴) تعداد صفرهای  $g$  کمتر یا مساوی تعداد صفرهای  $f$  است.

۷۶- فرض کنید  $f$  تابعی مشتق پذیر بر  $[0, 1]$  باشد که  $f'$  یک به یک است. در این صورت:

- (۱) ممکن است  $f'$  پیوسته نباشد ولی به هر حال مجموعه نقاط ناپیوستگی  $f$  شماراست.
- (۲) ممکن است  $f'$  در هیچ نقطه‌ای پیوسته نباشد.
- (۳) تابع  $f'$  در خاصیت مقدار میانی صدق می‌کند ولی ممکن است پیوسته نباشد.
- (۴) تابع  $f'$  پیوسته یکنواخت است.

۷۷- فرض کنید  $\{f_n\}$  دنباله‌ای از توابع باشد که بر  $[0, 1]$  به طور نقطه‌ای به تابع  $f$  همگراست. در این صورت اگر حرف  $u$  به مفهوم همگرایی یکنواخت باشد آنگاه:

- (۱) حتی اگر  $f_n \xrightarrow{u} f$  بر  $(0, 1)$  و بدانیم که  $f_n$  ها پیوسته‌اند، در حالت کلی نمی‌توان لزوماً نتیجه گرفت که  $f_n \xrightarrow{u} f$  بر  $[0, 1]$ .
- (۲) اگر  $f_n \xrightarrow{u} f$  بر  $(0, 1)$  آنگاه  $f_n \xrightarrow{u} f$  بر  $[0, 1]$ .
- (۳) اگر  $f_n \xrightarrow{u} f$  بر  $(0, 1)$  آنگاه تنها در صورتی می‌توان نتیجه گرفت  $f_n \xrightarrow{u} f$  بر  $[0, 1]$  که بدانیم  $f_n$  ها و  $f$  پیوسته‌اند.
- (۴) اگر  $f_n \xrightarrow{u} f$  بر  $[0, 1]$  آنگاه  $f$  انتگرال پذیر است.

۷۸- فرض کنید تابع  $f$  بر  $[0, 1]$  به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \notin Q \\ 0 & x = 0 \\ m \sin \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n} \quad (n, m) = 1 \end{cases}$$

در این صورت:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{4} \quad (۱)$$

(۲) تابع  $f$  در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست و لذا  $\int_0^1 f(x) dx$  موجود نیست.

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{4} \text{ و } \int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \quad (۳)$$

(۴) حد تابع  $f$  در نقاط گنگ موجود است ولی در نقاط گویا موجود نیست.

۷۹- سری  $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x^2)x^n$  بر بازه  $[0,1]$  داده شده است. فرض کنید به ازای هر  $0 \leq n$  و هر  $x \in [0,1]$ .

$$f_n(x) = (1-x^2)x^n \text{ در این صورت دنباله } \{f_n\}:$$

(۱) بر  $[0,1]$  یکنواخت همگرا نیست اما سری یکنواخت همگراست.

(۲) و سری هیچ کدام بر  $[0,1]$  یکنواخت همگرا نیستند.

(۳) بر  $[0,1]$  یکنواخت همگرا است اما سری بر  $[0,1]$  یکنواخت همگرا نیست.

(۴) و سری هر دو بر  $[0,1]$  یکنواخت همگرا هستند.

۸۰- فرض کنید تابع  $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $f(x) = [x] - 2x$  تعریف شده باشد. در این صورت:

(۱) تابع تغییر کل  $f$  بر بازه  $[-1,1]$  مقدار ثابتی است.

(۲) تغییر کل  $f$  بر بازه  $[-1,0]$  برابر ۲ است.

(۳) تغییر کل  $f$  بر بازه  $[-1,1]$  برابر ۶ است.

(۴)  $f$  با تغییر کران دار نیست.

۸۱- در یک دستگاه ممیز شناور نرمال شده برای نمایش اعداد حقیقی در مبنای ۸ با ۳ رقم در مانتیس و روش بریدن، فاصله بین عدد قابل نمایش  $10^k$  و نزدیکترین عدد قابل نمایش دیگر چقدر است؟

(۱)  $8^{k-2}$

(۲)  $8^{k-4}$

(۳)  $8^{k-3}$

(۴)  $8^{k-5}$

۸۲- فرض کنید  $a$  و  $b$  به ترتیب تقریب‌هایی دلخواه از  $A$  و  $B$  باشند،  $1 < a, b, A, B < 2$ ،  $|A - a|, |B - b| < 5 \times 10^{-2}$ ، یک کران بالا برای  $|A \times B - a \times b|$  کدام است؟

(۱)  $2 \times 10^{-1}$

(۲)  $1.5 \times 10^{-2}$

(۳)  $10^{-2}$

(۴)  $2 \times 10^{-2}$

۸۳- برای کدام یک از ماتریس‌های نامنفرد  $A$ ،  $n \times n$ ، تعداد عملیات ضرب لازم برای به دست آوردن جواب دستگاه  $Ax = b$  برابر  $O(n)$  است؟

(۱) متقارن

(۲) متقارن و معین مثبت

(۳) پایین مثلثی

(۴) سه قطری

۸۴- فرض کنید  $p(x)$  چند جمله‌ای درونیاب تابع  $f$  در نقاط  $x_0=0, x_1=1, x_2=2$  باشد و  $p(2)=5$ . اگر  $(x_2, f(x_2)) = (2, 2)$  به جدول درونیابی اضافه شود، مقدار  $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$  کدام است؟

(۱) ۲

(۲) -۱

(۳) -۲

(۴) ۱

۸۵- تخمین  $f(x) = x \ln x$  در بازه  $[1, 2]$  با توابع تکه‌ای خطی مدنظر است. تعداد زیر بازه‌های مساوی در این بازه حداقل چقدر باشد تا کران بالای خطای برشی تخمین‌ها در این بازه کمتر از  $2 \times 10^{-4}$  شود؟

(۱) ۵۰

(۲) ۲۵

(۳) ۱۰

(۴) ۱۰۰

۸۶- فرض کنید  $f(x) = x - \tan x$ . می‌دانیم که  $f(x) = x^m g(x)$  که در آن  $g(0) \neq 0$ . عدد  $m$  کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۱

۸۷- فرض کنید  $p(x)$  چند جمله‌ای درونیاب از درجه کوچکتر یا مساوی  $k$  برای  $k+1$  داده متمایز  $(x_i, x_i^5)$ ،  $i = 1, \dots, k+1$ ، است. در این صورت،  $p(x)$  برابر است با .....

(۱)  $x^5$  به ازای  $k \geq 5$

(۲)  $x^5$  به ازای  $k \geq 4$

(۳)  $x^5$  به ازای  $k \geq 3$

(۴) یک چند جمله‌ای از درجه  $k$  به ازای  $k \geq 5$

۸۸- فرض کنید  $x_0, x_1, \dots, x_n$  نقاط متمایز و برای هر  $0 \leq i \leq n$  قرار دهید:

$$\alpha_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j).$$

مقدار

$$\sum_{i=0}^n \frac{x_i^n}{\alpha_i}$$

برابر است با .....

(۱)  $n$ 

(۲) دو

(۳) یک

(۴)  $n!$ 

۸۹- تابع جدولی  $f$  در زیر داده شده است. درجه چند جمله‌ای درونیاب  $f$  کدام است؟

|       |    |   |    |   |    |
|-------|----|---|----|---|----|
| $x_i$ | -۱ | ۰ | ۱  | ۲ | -۲ |
| $f_i$ | ۱  | ۰ | -۱ | ۴ | -۴ |

(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) ۱

(۴) ۴

۹۰- چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی  $f$  در تعدادی نقطه برابر است با  $x^3 - x + 2$ . با افزودن کدام نقطه چند جمله‌ای درونیاب  $f$

تغییر نمی‌کند؟

(۱)  $(2, 7)$ (۲)  $(-2, -5)$ (۳)  $(-3, -22)$ (۴)  $(3, 25)$

۹۱- فرض کنید  $P_1(x)$  چند جمله‌ای درونیاب یک تابع جدولی در نقاط  $x = -1, 0, 1$  باشد. مختصات نقطه  $(2, 6)$  را به آن بیافزایید. اگر  $P_2(x)$  چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی جدید باشد، آنگاه مقدار  $|P_1(2) - P_2(2)|$  برابر است با .....

$$(1) \quad |1/5 - 0/25 P_1(2)|$$

$$(2) \quad |0/25 - 1/5 P_1(2)|$$

(۳) صفر

$$(4) \quad |0/25 + 1/5 P_1(2)|$$

۹۲- فرض کنید  $f(x) = x - \sin x$ . فرمول تکرار روش نیوتن برای تعیین تقریبی از ریشه معادله  $f(x) = 0$  کدام است؟

$$x_{n+1} = \frac{x_n \cos x_n + \sin x_n}{\cos x_n - 1} \quad (1)$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n (2 - \cos x_n) - \sin x_n}{1 - \cos x_n} \quad (2)$$

$$x_{n+1} = \frac{\sin x_n - x_n \cos x_n}{1 - \cos x_n} \quad (3)$$

$$x_{n+1} = \frac{\sin x_n - x_n \cos x_n}{\cos x_n - 1} \quad (4)$$

۹۳- فرض کنید  $g$  روی  $I = [a, b]$  پیوسته است،  $g'(x) = 0$  و  $g''(x) > 0$  برای برخی  $x \in I$  و  $g(a)g(b) < 0$ . در این صورت  $g$  در  $I$  .....

(۱) حداقل سه ریشه دارد.

(۲) دقیقاً یک ریشه دارد.

(۳) می‌تواند ریشه نداشته باشد.

(۴) می‌تواند یک یا بیشتر از یک ریشه داشته باشد.

۹۴- قرار دهید  $f'_i \approx \frac{1}{h} \left( \Delta - \frac{\Delta^2}{2} \right) f_i$  که در آن  $f'_i = f'(x_i)$  و  $x_{i+1} - x_i = h$ . اگر خطای این تقریب  $O(h^k)$  باشد،  $k$  کدام است؟  $(\Delta f_i = f_{i+1} - f_i)$

(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) ۱

(۴) ۴

۹۵- محاسبه ریشه منفی معادله  $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$  به وسیله تکرار نقطه ثابت  $x_{n+1} = -(x_n + 2)^{\frac{1}{2}}$  مدنظر است. این روش به ازای مقادیر  $x$  ..... است.

(۱) بزرگتر از  $-\frac{7}{4}$  به ریشه منفی همگرای مرتبه دوم

(۲) بزرگتر از  $-\frac{7}{4}$  به ریشه منفی همگرای خطی

(۳) بزرگتر از  $-3$  به ریشه منفی همگرای خطی

(۴) بزرگتر از  $-3$  به ریشه منفی همگرای مرتبه دوم

۹۶- دنباله  $\{x_n\}$  که با رابطه بازگشتی  $x_{n+1} = \frac{x_n^2(x_n - 3)}{1 - 3x_n}$  و نقطه شروع  $x_0$  به دست می‌آید، با انتخاب  $x_0$  می‌تواند به

صفر یا یک همگرا شود. مرتبه همگرایی این دنباله به صفر و یک به ترتیب برابر است با .....

(۱) ۲ و ۳

(۲) ۲ و ۲

(۳) ۱ و ۲

(۴) ۳ و ۳

۹۷- تابع  $f(x) = (x-1)^4$  را در نظر بگیرید و یک روش نیوتن اصلاح شده را برای پیدا کردن ریشه این تابع با شروع از نقطه  $x_0 = 0/5$  در نظر بگیرید:

$$x_{n+1} = x_n - k \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

این روش با هر نقطه شروع اولیه، .....

(۱) همگرایی مجانبی از مرتبه ۲ دارد.

(۲) همگرایی مجانبی خطی دارد.

(۳) واگرا می‌شود.

(۴) به ازای  $k = 4$  دقیقاً در یک تکرار به جواب می‌رسد.

۹۸- فرض کنید اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ ریشه‌های تابع پیوسته  $f(x)$  باشند که در بازه  $[1, 5]$  ریشه دیگری ندارد. فرض کنید ریشه‌ها با مقادیر ۲، ۳ و ۴، ساده (از مرتبه یک) اند. اگر  $1 < a < 2$ ،  $4 < b < 5$  و  $a + b < 6$ ، آنگاه روش دو بخشی در بازه  $[a, b]$  به ..... همگراست.

(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) ۱

(۴) ۴

۹۹- روش  $n$  نقطه‌ای گاوس - لژاندر برای تخمین انتگرال به صورت زیر مدنظر است:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i),$$

که در آن،  $w_i$  ها و  $x_i$  ها به گونه‌ای تعیین می‌شوند تا فرمول‌های طرف راست برای چند جمله‌ای‌هایی از درجه کوچکتر یا مساوی  $2n-1$  دقیق باشد. در این صورت،  $w_i$  ها و  $x_i$  ها جواب دستگاه معادلات:

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i^k = \frac{1 - (-1)^p}{q}, \quad k = 0, 1, \dots, r$$

هستند که در آن، .....

$$(1) \quad r = 2n, \quad q = k, \quad p = k+1$$

$$(2) \quad r = 2n, \quad q = k+1, \quad p = k$$

$$(3) \quad r = 2n-1, \quad p = q = k+1$$

$$(4) \quad r = 2n+1, \quad p = q = k$$

۱۰۰- مقدار تخمینی  $y(0/1)$  از معادله دیفرانسیل  $y'(x) = f(x, y(x)) = x^2 y(x)$ ،  $y(0) = 1$  با روش سری تیلر مرتبه ۳ (تا مشتقات سوم) به ازای  $h = 0/1$ ، کدام است؟

$$(1) \quad 1/0003$$

$$(2) \quad 0/0009$$

$$(3) \quad 0/0007$$

$$(4) \quad 1/003$$

۱۰۱- بعد فضای برداری  $\mathbb{R}^f \times \mathbb{C}^r$  روی میدان  $\mathbb{R}$  چند است؟

(۱) ۱۲

(۲) ۷

(۳) ۱۰

(۴) ۲۴

۱۰۲- فرض کنید  $P_n$  فضای برداری چند جمله‌ای‌ها از درجه حداکثر  $n$  با ضرایب حقیقی باشد. همچنین فرض کنید  $d$  تبدیل خطی

از فضای  $P_n$  به  $P_n$  باشد که برای هر  $f \in P_n$ ،  $d(f) = f^{(k)}$  مشتق  $k$ ام  $f$  است. بومی  $d$  کدام است؟

(۱)  $k$

(۲)  $k-1$

(۳)  $n-k$

(۴)  $n-k+1$

۱۰۳- فضای برداری  $V = \mathbb{C}^r$  روی  $\mathbb{R}$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  و  $V_2 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}$ ،  $V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}$ ،  $V_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  پایه‌ای

برای  $V$  باشد. در این صورت ماتریس نمایش تبدیل خطی زیر تحت این پایه کدام است؟

$$T\left(\begin{bmatrix} a+bi \\ c+di \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-bi \\ c-di \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

۱۰۴- اگر  $A$  ماتریسی  $2 \times 2$  با مقادیر ویژه متمایز  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  باشد و  $X_1$  و  $X_2$  بردارهای ویژه متناظر با  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  باشند و

$P = [X_1 | X_2]$ ، آنگاه  $P^{-1}AP$  برابر است با:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (1) \quad \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (3) \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

۱۰۵- فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  با درایه‌ها در یک میدان باشد. اگر  $A$  دارای وارون راست باشد آنگاه رتبه  $A$  برابر است با:

$$\begin{matrix} m & (1) \\ n & (2) \\ \max\{m, n\} & (3) \\ m+n & (4) \end{matrix}$$

۱۰۶- فرض کنید  $V = M_n(\mathbb{R})$  فضای برداری تمام ماتریس‌های  $n \times n$  با درایه‌های حقیقی باشد.  $T: V \rightarrow V$  تبدیل خطی با

ضابطه  $T(A) = A^t$  است. اثر  $T$  (یعنی  $\text{tr}(T)$ ) کدام است؟ ( $A^t$  ترانپوز ماتریس  $A$  است.)

$$\begin{matrix} n & (1) \\ 0 & (2) \\ n^2 - n & (3) \\ n^2 & (4) \end{matrix}$$

۱۰۷- فرض کنید  $A$  ماتریسی با درایه‌های مختلط باشد و عدد طبیعی  $m > 1$  موجود باشد به طوری که  $A^m = I$ . در این صورت

کدام گزینه صحیح است؟

$$\begin{matrix} \det A = 1 & (1) \\ \text{tr}(A) = 0 & (2) \\ A \text{ قطری شدنی است.} & (3) \\ \text{تمامی مقادیر ویژه } A \text{ برابر ۱ هستند.} & (4) \end{matrix}$$

۱۰۸- فرض کنید  $P_3$  فضای چند جمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی و از درجه حداکثر ۳ باشد. تبدیل خطی  $T: M_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3$  با

ضابطه  $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b+cd) + cx^2 + cx^3$  تعریف شده است. بعد فضای پوچ  $T$  برابر است با:

$$\begin{matrix} 1 & (1) \\ 2 & (2) \\ 3 & (3) \\ 0 & (4) \end{matrix}$$

۱۰۹- فرض کنید  $A$  و  $B$  ماتریس‌هایی با درایه‌های حقیقی و با تعداد سطرهای مساوی‌اند. اگر  $\text{rank}(A)$  نمایانگر رتبه ماتریس  $A$

باشد آنگاه رتبه ماتریس  $\begin{pmatrix} A & B \\ 2A & -5B \end{pmatrix}$  برابر است با:

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \quad (۲)$$

$$\text{rank}(A)\text{rank}(B) \quad (۱)$$

$$2\text{rank}(A) + 5\text{rank}(B) \quad (۴)$$

$$|\text{rank}(A) - \text{rank}(B)| \quad (۳)$$

۱۱۰- فرض کنید  $V$  فضای برداری با بعد متناهی روی میدان  $\mathbb{R}$  است و  $S$  و  $T$  عملگرهای رتبه ۱ با هسته‌ها و تصاویر مساوی‌اند. در

این صورت کدام گزینه صحیح است؟

$$S = T \quad (۲)$$

$$ST = -TS \quad (۱)$$

$$ST = TS \quad (۴)$$

$$S^2 = T^2 \quad (۳)$$

۱۱۱- فرض کنید  $V$  فضای برداری ۴ بعدی با پایه  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  روی میدان دلخواه  $F$  است. اگر  $T$  تبدیل خطی روی  $V$

باشد به طوری که  $T(\alpha_i) = \alpha_{i+1}$  برای  $1 \leq i \leq 3$  و همچنین  $T(\alpha_4) = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$ ، چند جمله‌ای ویژه  $T$

کدام است؟

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \quad (۱)$$

$$x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 \quad (۲)$$

$$x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 \quad (۳)$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \quad (۴)$$

۱۱۲- فرض کنید دو بردار  $x$  و  $y$  پایه متعامد یکه برای فضای  $\mathbb{R}^2$  باشند و  $A = xy^t$ . در این صورت رتبه  $A$  و رتبه  $A^2$  به ترتیب

برابرند با:

$$۱ \text{ و } ۱ \quad (۱)$$

$$۰ \text{ و } ۱ \quad (۲)$$

$$۰ \text{ و } ۰ \quad (۳)$$

$$۱ \text{ و } ۱ \quad (۴)$$

۱۱۳- اگر  $\lambda$  مقدار ویژه‌ای از تبدیل خطی  $T: V \rightarrow V$  باشد آنگاه زیر فضای تولید شده توسط مجموعه بردارهای ویژه  $T$  که نظیر  $\lambda$  هستند را با  $W_\lambda$  نمایش می‌دهیم. تبدیل خطی  $T: M_p(\mathbb{R}) \rightarrow M_p(\mathbb{R})$  با ضابطه

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

را در نظر بگیرید. کدام گزینه در مورد  $T$  صحیح است؟

(۱)  $T$  دو مقدار ویژه متمایز مانند  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  دارد به طوری که  $\dim W_{\lambda_1} = \dim W_{\lambda_2}$

(۲)  $T$  مقدار ویژه‌ای مانند  $\lambda$  دارد به طوری که  $\dim W_\lambda = 1$

(۳)  $T$  مقدار ویژه‌ای مانند  $\lambda$  دارد به طوری که  $\dim W_\lambda = 3$

(۴) مجموع مقادیر ویژه متمایز  $T$  برابر با یک است.

۱۱۴- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  چنانچه  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  مقدار ویژه‌های  $A$  باشند داریم:

(۱)  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = -2$

(۲)  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$

(۳)  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -5$

(۴)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = \lambda_4 = -3$

۱۱۵- فرض کنید  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  یک تبدیل خطی است و به ازای هر زیرفضای یک بُعدی  $W$  از  $\mathbb{R}^n$  داریم  $T(W) = W$ . اگر  $c_1, \dots, c_n$  مقادیر ویژه  $T$  باشند در این صورت داریم:

(۱)  $c_1 = c_2 = \dots = c_n$

(۲)  $n = 1$

(۳)  $T$  قطری شدنی است ولی  $c_i$  ها ممکن است متمایز باشند.

(۴)  $T$  قطری شدنی نیست.

۱۱۶- فرض کنید  $V$  یک فضای برداری روی میدان  $F$  باشد در کدام یک از حالت‌های زیر تعداد زیرفضاهای  $V$  متناهی است؟

(۱) مشخصه  $F$  صفر نباشد.

(۲)  $F$  میدان متناهی باشد.

(۳)  $\dim_F V$  متناهی باشد.

(۴) هر تابع خطی روی  $V$  ضربی از همانی باشد.

۱۱۷- فرض کنید  $A$  ماتریسی  $4 \times 4$  باشد که در معادله زیر صدق می‌کند.

$$24A^4 - 50A^3 + 25A^2 - 10A + I = 0$$

در این صورت داریم:

$$\det A = \frac{1}{24} \text{ و } \operatorname{tr} A = -\frac{25}{12} \quad (1)$$

$$\det A = 24 \text{ و } \operatorname{tr} A = 10 \quad (2)$$

$$\det A^{-1} = 24 \text{ و } \operatorname{tr} A^{-1} = 10 \quad (3)$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{24} \text{ و } \operatorname{tr} A^{-1} = -\frac{25}{12} \quad (4)$$

۱۱۸- تبدیل خطی  $T: P_2 \rightarrow P_2$  که در آن فضای برداری چند جمله‌ای‌ها از درجه حداکثر ۲ است با ضابطه زیر تعریف می‌شود:

$$T(p(t)) = (t-1)p'(t) + p(0)$$

که در آن  $p'$  مشتق  $p$  است. در این صورت چند جمله‌ای می‌نیمال  $T$  کدام است؟

$$(x^2-1)(x-2) \quad (1)$$

$$(x-1)(x-2)^2 \quad (2)$$

$$(x-1)(x-2) \quad (3)$$

$$(x-1)^2(x-2) \quad (4)$$

۱۱۹- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$  در این صورت  $A^{1389}$  برابر است با:

$$6A^{1386} + 5A^{1385} \quad (1)$$

$$5A^{1386} + 6A^{1385} \quad (2)$$

$$3A^{1386} + 2A^{1385} \quad (3)$$

$$2A^{1386} + 3A^{1385} \quad (4)$$

۱۲۰- بزرگترین مجموعه مستقل خطی از ماتریس‌های  $4 \times 4$  که دو به دو با یکدیگر جابجا می‌شوند چند عضو دارد؟

$$3 \quad (1)$$

$$2 \quad (2)$$

$$4 \quad (3)$$

$$5 \quad (4)$$