

410

C

دانلود کتاب، جزوه و مقاله تخصصی ریاضی در

سایت ریاضیات ایران

بزرگترین سایت ریاضی

نام  
نام خانوادگی  
محل امضاء

<http://IRmath.com>

عصر پنجشنبه  
۸۹/۱۱/۲۸



اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.  
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۰

مجموعه ریاضی - کد ۱۲۰۸

مدت پاسخگویی: ۲۴۰ دقیقه

تعداد سؤال

IRmath

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی	۳۰	۱	۳۰
۲	ریاضیات عمومی	۳۰	۳۱	۶۰
۳	معادلات دیفرانسیل	۲۵	۶۱	۸۵
۴	آمار و احتمال	۲۵	۸۶	۱۱۰

بهمن ماه سال ۱۳۸۹

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.

## PART A: Vocabulary

**Directions:** Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the correct choice on your answer sheet.

- 1- These ideas are not quite new; they \_\_\_\_\_ ancient philosophers.  
1) give rise to                      2) depart for                      3) descend from                      4) put over
- 2- The story \_\_\_\_\_ the lives of people in the last century.  
1) persists                      2) settles                      3) contends                      4) depicts
- 3- Strong storms have been \_\_\_\_\_ our efforts to find flood survivors.  
1) demarcating                      2) hampering                      3) submitting                      4) surmising
- 4- The military in most countries uses radar satellites to \_\_\_\_\_ targets through clouds and at night.  
1) overthrow                      2) disallow                      3) dominate                      4) track
- 5- The association works to promote the \_\_\_\_\_ of retired people as active and useful members of the community.  
1) disclosure                      2) posture                      3) standpoint                      4) status
- 6- At the end of the article, the author bridges all the different \_\_\_\_\_ of the argument together.  
1) conversions                      2) strands                      3) dealings                      4) remnants
- 7- Life in Britain was transformed by the \_\_\_\_\_ of the steam engine.  
1) undertaking                      2) advent                      3) expenditure                      4) disposition
- 8- There is evidence that a(n) \_\_\_\_\_ to cancer runs in some families.  
1) predisposition                      2) incident                      3) prospect                      4) dilemma
- 9- The journalists insisted on getting to the front line of the battle, \_\_\_\_\_ of the risks.  
1) unaccustomed                      2) inevitable                      3) heedless                      4) devoid
- 10- Computers operate using \_\_\_\_\_ numbers (the values 0 and 1).  
1) trivial                      2) scant                      3) binary                      4) dual

## PART B: Cloze Test

**Directions:** Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

The Sahara is the great desert of northern Africa and the largest in the world. (11) \_\_\_\_\_ the Atlantic Ocean on the west to the Red Sea on the east, and from the Atlas Mountains and Mediterranean Sea on the north (12) \_\_\_\_\_ the savannas of the Sudan region on the south. (13) \_\_\_\_\_ more than 3 million square miles (8 million sq km), the Sahara is divided among many countries. Parts of the desert are known by separate names, such as the Eastern or Arabian Desert between the Nile River and the Red Sea, and the Libyan Desert along the border between Egypt and Libya. The Sahara has (14) \_\_\_\_\_ of 2 million excluding the densely settled Nile Valley, (15) \_\_\_\_\_ apart from the surrounding desert. The principal language of the people of the Sahara is Arabic and their religion is Islam.

- |                                |                            |
|--------------------------------|----------------------------|
| 11- 1) There extends between   | 2) It extends between      |
| 3) There extends from          | 4) It extends from         |
| 12- 1) to                      | 3) at                      |
| 2) on                          | 4) in                      |
| 13- 1) Across an area with     | 2) With an area of         |
| 3) To be an area with          | 4) To be an area of        |
| 14- 1) an estimated population | 2) a population estimated  |
| 3) estimated a population      | 4) a population estimating |
| 15- 1) which it considers      | 2) that is considered      |
| 3) which is considered         | 4) that it considers       |

### PART C: Reading Comprehension

**Directions:** Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on our answer sheet.

#### Passage 1:

A word about problems. There are a great number of them. It would be an extraordinary student indeed who could solve them all. Some are present merely to complete proof in text material; others to illustrate to give practice in the results obtained. Many are introduced not to be solved as to be talked. The value of a problem is not so much in coming up with the answer as in the ideas and attempted ideas it forces on the would-be solver. Others are included in anticipation of material to be developed later, the hope and rationale for this being both to the groundwork for the subsequent theory and also to make more natural ideas, definitions, and arguments as they are introduced. Several problems, which for some reason or other seem difficult to me, are often starred (sometimes with two stars). However, even here there will be no agreement among mathematicians; many will feel that some unstarred problems should be starred and vice versa.

#### 16- Choose the correct sentence.

- 1) Unstarred problems are unusually hard problems.
- 2) Mathematicians disagree on the difficulty of problems.
- 3) Mathematicians do not care about two starred problems.
- 4) There is no difference between the starred and unstarred problems.

#### 17- The writer expects .....

- 1) the problems to pave the way for a rudimentary understanding of the principles of mathematics
- 2) mathematicians to disagree about the solution to some of the problems
- 3) only very talented students to be able to solve all the problems
- 4) the students to avoid those problems that are starred

18- The word "others" in line 3 refers to .....

- 1) problems                      2) students                      3) proofs                      4) materials

19- Choose the incorrect sentence about problems.

- 1) They enjoy the same difficulty level from the viewpoint of different mathematicians.  
2) They are devised such that each type fulfills a particular purpose.  
3) They sometimes lay the groundwork for the subsequent theory to be discussed later.  
4) They look a bit abstruse to some would-be solvers.

20- A problem is valuable because .....

- 1) of its difficulty                      2) it helps the development of ideas  
3) of its obtained solution                      4) it requires a vast knowledge

### Passage 2:

We adopt, as most mathematicians do, the naïve point of view regarding set theory. We shall assume that what is meant by a set of objects is intuitively clear, and we shall proceed on that basis without analyzing the concept further. Such an analysis properly belongs to the foundations of mathematics and to mathematical logic, and it is not our purpose to initiate the study of those fields.

Logicians have analyzed set theory in great detail, and they have formulated axioms for the subject. Each of their axioms expresses a property of sets that mathematicians commonly accept, and collectively the axioms provide a foundation broad enough and strong enough that the rest of mathematics can be built on them.

It is unfortunately true that careless use of set theory, relying on intuition alone can lead to contradictions. Indeed, one of the reasons for the axiomatization of set theory was to formulate rules for dealing with sets that would avoid these contradictions. Although we shall not deal with the axioms explicitly, the rules we follow in dealing with sets derive from them. In this book, you will learn how to deal with sets in an "apprentice" fashion, by observing how we handle them and by working with them yourself. At some point of your studies, you may wish to study set theory more carefully and in greater detail; then a course in logic or foundations will be in order.

21- The first sentence of the passage shows that the author .....

- 1) has, as most mathematicians have, accepted a less simplistic view of set theory  
2) thinks that most mathematicians do not agree with him about his view towards set theory  
3) believes set theory is a set of crude axioms that most mathematicians have no choice but to adopt  
4) follows a point of view similar to that of most mathematicians concerning set theory

22- The word "intiate" in line 5 is closest in meaning to .....

- 1) transmute                      2) repudiate                      3) modify                      4) commence

23- Which of the following is NOT true about the axioms as they are discussed in the passage?

- 1) They each express a property of sets generally agreed upon by mathematicians.  
2) They are yet to be explored in detail.  
3) They form a basis on which mathematics stands.  
4) They are part of set theory.

- 24- The majority of mathematicians have a ..... viewpoint of set theory.  
 1) deterministic      2) probabilistic      3) simplistic      4) diversified
- 25- What the author means when he says, "In this book, you will learn how to deal with sets in an "apprentice" fashion," is that the concept in focus would be .....  
 1) handled to remove apprentices' misconceptions  
 2) investigated to remove its contradictions  
 3) presented in a way suitable for use by expert mathematicians  
 4) handled in an easy and practical way
- 26- The study of logic and foundation .....  
 1) can help in-depth understanding of set theory      2) may not be beneficial  
 3) may harm understanding of set theory      4) showed to be unnecessary

**Passage 3:**

**More Ideals and Quotient Rings.** We continue the discussion of ideals and quotient rings.

Let us take the point of view, for the moment at least, that a field is the most desirable kind of ring. Why? If for no other reason, we can divide in a field, so that operations and results in a field more closely approximate our experience with real and complex numbers. In addition, as was illustrated by Problem 2 in the preceding problem set, a field has no homomorphic images other than itself or the trivial ring consisting of 0. Thus we cannot simplify a field by applying a homomorphism to it. Taking these remarks into consideration it is natural that we try to link a general ring, in some fashion, with fields. What should this linkage involve? We have a machinery whose component parts are homomorphisms, ideals, and quotient rings. With these we will forge the link.

But first we must make precise the rather vague remarks of the preceding paragraph. We now ask the explicit question: under what conditions is the homomorphic image of a ring a field? For commutative rings we complete the answer in this section.

Essential to treating this question is the converse to the result of Problem 2 of the problem list at the end of Section 4.

- 27- The "Why?" question in line 3 is intended to .....  
 1) explain the assumption made in the previous sentence  
 2) give a hint of the author's curious mind  
 3) demonstrate a question that is often asked  
 4) show how curious the author is
- 28- The word "approximate" in line 4 is closest in meaning to .....  
 1) arrange      2) harmonize      3) familirize      4) approach
- 29- It is ..... to establish a link between fields and general rings.  
 1) pessimistic      2) unrealistic      3) proper      4) improper

30- According to the passage, why can't we simplify a field by applying a homomorphism to it?

- 1) Because of a machinery whose component parts are homomorphisms, ideals, and quotient rings
- 2) Because of what was illustrated in Problem 2
- 3) Because a field has certain homomorphic images other than itself or the trivial ring consisting of 0
- 4) Because we must link a general ring, in some fashion, with fields

۳۱- انتگرال سطحی تابع برداری  $\vec{F} = \langle x, -z^2, -2y \rangle$  روی سطح حادث از دوران منحنی به معادله  $(x-a)^2 + y^2 = b^2$  حول  $0 < a < b$

محور y ها عبارتست از:

(۱)  $2\pi a^2 b$

(۲)  $\pi ab$

(۳)  $2\pi a b^2$

(۴)  $2\pi a^2 b$

۳۲- به ازای چه مقادیری از a و b (بر حسب c) تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & |x| > c \\ a + bx^2 & |x| \leq c \end{cases}$  در c مشتق پذیر است؟

(۱)  $b = -\frac{1}{2c^2}, a = \frac{2}{c}$

(۲)  $b = \frac{2}{c}, a = -\frac{1}{2c^2}$

(۳)  $b = \frac{1}{2c^2}, a = \frac{2}{c}$

(۴)  $b = -\frac{2}{c}, a = \frac{1}{2c^2}$

۳۳- اگر  $\vec{F}(x, y) = (\Delta x - y^2)\vec{i} + (3x - 2)\vec{j}$  و C مثلث به رئوس  $(1, 2), (4, 2), (4, 6)$  باشد که در جهت مثلثاتی طی می شود. در این صورت  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{S}$  برابر است با:

(۱) ۲۰

(۲) ۱۵

(۳) ۳۰

(۴) ۴۵

۳۴- مقدار  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \ln(|x|+|y|)$  کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

(۱) ۱

(۲) ۰

(۳)  $\infty$

(۴) موجود نیست.

۳۵- معادله یک رویه در مختصات استوانه‌ای به صورت  $r^2 \cos^2 \theta + z^2 + 1 = 0$  است معادله این رویه در مختصات دکارتی کدام است؟

(۱)  $y^2 + x^2 - z^2 = 1$

(۲)  $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

(۳)  $z^2 - x^2 - y^2 = 1$

(۴)  $y^2 - x^2 - z^2 = 1$

۳۶- حاصل انتگرال  $\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx$  برابر است با:

(۱)  $\frac{(-1)^m n!}{(m+1)^n}$

(۲)  $\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$

(۳)  $\frac{(-1)^n m!}{(n+1)^{m+1}}$

(۴)  $\frac{(-1)^n n!}{n^{m+1}}$

۳۷- برای نمودار به معادله  $\sinh(xy) - \cosh(xy) + 1 = 0$  کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) نمودار نسبت به مبدأ مختصات قرینه است.
- (۲) نمودار نسبت به محور  $y$  ها قرینه است.
- (۳) نمودار نسبت به محور  $x$  ها قرینه است.
- (۴) نمودار نسبت به محور  $y$  ها و مبدأ مختصات قرینه است.

۳۸- فرض کنیم  $\vec{R} = \vec{R}(t) \neq \vec{0}$  و داشته باشیم  $\vec{R} \times \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{0}$ . در این صورت کدام گزینه همیشه درست است؟

- (۱) طول  $\vec{R}$  ثابت است.
- (۲) جهت  $\vec{R}$  ثابت است.
- (۳)  $\frac{d\vec{R}}{dt}$  بر  $\vec{R}$  عمود است.
- (۴)  $\frac{d\vec{R}}{dt}$  به موازات مسیر حرکت است.

۳۹- مقدار  $\iint_R x^2 \cos^2 y + 3 \sin y - \pi dx dy$  را که در آن  $R = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$  برابر کدام گزینه است؟

- (۱)  $-\pi$
- (۲)  $-2\pi$
- (۳)  $\pi$
- (۴)  $2\pi$

۴۰- اگر  $I = \iint_R \cos^2 \theta dx dy$  که در آن  $R$  ناحیه خارج از دایره  $r=1$  و واقع بین شعاع‌های  $\theta=0$ ،  $\theta=\frac{\pi}{4}$  و خط  $x=2$  است، آنگاه مقدار  $I$  برابر کدام گزینه است؟

- (۱)  $\frac{7\pi-2}{16}$
- (۲)  $\frac{5\pi-1}{16}$
- (۳)  $\frac{9\pi-1}{16}$
- (۴)  $\frac{11\pi-1}{16}$

۴۱- خط  $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-2}$  روی کدامیک از سطوح زیر قرار دارد؟

$$(1) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = z$$

$$(2) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z$$

$$(3) \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = z$$

$$(4) \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = z$$

۴۲- فرض می‌کنیم  $f(x)$  تابعی باشد که  $f(1)=1$  و به ازای  $x \geq 1$  داشته باشیم  $f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$ . مقدار  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  کدام

است؟

(۱) برابر  $1 + \frac{\pi}{4}$  است.

(۲) بزرگتر از  $1 + \frac{\pi}{4}$  است.

(۳) کوچکتر از  $1 + \frac{\pi}{4}$  است.

(۴) موجود نیست.

۴۳- دامنه تابع  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n \ln(n+1)}$  کدام است؟

(۱)  $[0, 4)$

(۲)  $[0, 4]$

(۳)  $(0, 5]$

(۴)  $[-2, 2]$

۴۴- مقدار  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n) n^{\frac{1}{n}}}{(n^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}}$  کدام است؟

(۱)  $e^{-\frac{1}{2}}$

(۲)  $e^{-\frac{1}{4}}$

(۳)  $e^{\frac{1}{4}}$

(۴)  $e^{\frac{1}{2}}$

۴۵- معادله صفحه‌ای که از خط  $\begin{cases} 2x+z=1 \\ 3y+z=10 \end{cases}$  گذشته و بر رویه  $x^2+y+z=3$  مماس باشد عبارتست از:

(۱)  $x+2y-z=1$

(۲)  $2x+2y+z=0$

(۳)  $x-2y+z=2$

(۴)  $2x+y+z=4$

۴۶- حاصل عبارت  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sin^{-1}y} x dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dy \int_0^{\cos^{-1}y} x dx$  کدام است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi-1$

(۲)  $\frac{\pi}{4}-1$

(۳)  $\frac{\pi}{4}+1$

(۴)  $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi+1$

۴۷- تابع  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2y^2}{|x| + |y|} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  را در نظر بگیرید. مشتق سویی تابع  $f$  در جهت بردار  $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$  در مبدا مختصات کدام است؟

(۱)  $-\frac{9}{25}$

(۲) صفر

(۳)  $\frac{9}{25}$

(۴) وجود ندارد.

۴۸- اگر  $\begin{cases} x^2 + y^2 = u \\ x \sin y + y = v \end{cases}$  آنگاه حاصل  $\frac{\partial x}{\partial v}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{x}{x^2 \cos y + x + y \sin y}$

(۲)  $x \cos y + 1$

(۳)  $\frac{x^2 \cos y + x + y \sin y}{-y}$

(۴)  $\frac{-y}{x^2 \cos y + x - y \sin y}$

۴۹- ماکزیمم و مینیمم مقید تابع  $f(x, y) = x^2 + y^2$  نسبت به شرط  $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$ ، کدام است؟

(۱)  $\text{Max} f = 0, \text{Min} f = -10$

(۲)  $\text{Max} f = 10, \text{Min} f = 0$

(۳)  $\text{Max} f = 20, \text{Min} f = 0$

(۴)  $\text{Max} f = 0, \text{Min} f = -20$

۵۰- جرم کل چهار وجهی  $T$  با چگالی  $\rho(x,y,z) = \frac{16}{(1+x+y+z)^2}$  که در یک هشتم اول قرار دارد و محدود به صفحه

$x+y+z=1$  و صفحات مختصات است برابر است با:

(۱)  $8\ln 2 - 5$

(۲)  $5 - \ln 2$

(۳)  $5 + \ln 2$

(۴)  $8\ln 2 + 5$

۵۱- حجم ناحیه توپر  $T$  که از بالا به کره  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  و از پایین به مخروط  $z = \sqrt{x^2 + y^2} \cot \phi$  محدود می‌باشد (  $\phi$  زاویه بین مولدهای مخروط با محور  $z$  ها و  $0 < \phi < \pi$  ) برابر است با:

(۱)  $\frac{2}{3}\pi a^2(1 + \cos \phi)$

(۲)  $\frac{2}{3}\pi a^2(1 - \cos \phi)$

(۳)  $\frac{4}{3}\pi a^2(1 - \cos \phi)$

(۴)  $\frac{4}{3}\pi a^2(1 + \cos \phi)$

۵۲- فرض کنیم  $f(x)$  تابعی باشد که روی  $[a, b]$  پیوسته و دارای مشتق پیوسته باشد و علاوه،

$\int_a^b f'(x)dx = 1$ ,  $f(a) = f(b) = 0$ . در این صورت مقدار  $\int_a^b (xf(x)f'(x))dx$  برابر کدام است؟

(۱)  $-\frac{1}{2}$

(۲)  $-\frac{3}{2}$

(۳)  $\frac{1}{2}$

(۴)  $\frac{3}{2}$

۵۳- مقدار  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n}{2n-1} \right)^{2n+\sqrt{n}}$  کدام است؟

(۱)  $e^{\frac{1}{2}}$

(۲)  $e^{-\frac{1}{2}}$

(۳)  $e^{\frac{1}{2}}$

(۴)  $e^{\frac{1}{2}}$

۵۴- ضرب جمله سوم بسط تیلور  $\frac{\ln(1-x)}{x-1}$  حول  $x=0$  برابر کدام است؟

(۱)  $-\frac{10}{6}$

(۲)  $-\frac{11}{6}$

(۳)  $\frac{10}{6}$

(۴)  $\frac{11}{6}$

۵۵- بهترین مقدار تقریبی  $S$  برای  $1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \dots + 1000^{10}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1000^{11}}{11} < S < 1000^{11} + \frac{1000^{11}}{11}$

(۲)  $1000^{10} + 1 < S < 1000^{11} + \frac{1000^{11}}{11}$

(۳)  $\frac{1000^{11}}{11} < S < 1000^{10} + \frac{1000^{11}}{11}$

(۴)  $1000 < S < 1000^{10} + \frac{1}{10}$

۵۶- فرض کنید  $f$  تابعی پیوسته و دارای مشتق پیوسته و اکیداً صعودی روی  $[0, b]$ ،  $b > 0$  باشد و  $f(0) = 0$ . در این صورت برای

هر  $x \in [0, b]$ ،  $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt$  برابر کدام است؟

(۱)  $xf'(x)$

(۲)  $f(b)$

(۳)  $xf(x)$

(۴)  $xf^{-1}(x)$

۵۷- خط مماس بر منحنی فصل مشترک رویه‌های  $x^2 + y^2 = 1$  و  $z = 1$  در نقطه  $(0, 1, 1)$  کدام است؟

(۱)  $y + z = 2$

(۲)  $x + y = 1$

(۳)  $\begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

(۴)  $\begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

۵۸- کدام گزینه در مورد انتگرال ناسره (توسعی)  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$  صحیح است؟

(۱) واگراست

(۲) همگرا با مقدار همگرایی  $\pi$  می‌باشد.

(۳) همگرا با مقدار همگرایی  $\frac{1}{\pi}$  می‌باشد.

(۴) همگرا با مقدار همگرایی یک می‌باشد.

۵۹- اگر  $\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$ ,  $n > 0$ ,  $m > 0$ , مقدار  $\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$  کدام است؟

(۱)  $\frac{\beta(m, n)}{m^2}$

(۲)  $\frac{\beta(m, n)}{2^n}$

(۳)  $\frac{\beta(m, n)}{2^m}$

(۴)  $\frac{\beta(m, n)}{2^{m+n}}$

۶۰- اگر تابع  $f$  به صورت  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  تعریف شود، آنگاه  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$  به  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  به

ترتیب عبارتند از: (منظور از  $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$  یعنی مشتق‌گیری نسبت به  $x$  و سپس نسبت به  $y$ )

(۱) ۱ و -۱

(۲) -۱ و ۱

(۳) ۱ و ۱

(۴) -۱ و -۱

۶۱-  $F(t) = \begin{cases} \sin(t) & 0 < t < \pi \\ -\sin(t) & \pi < t < 2\pi \\ F(t + 2\pi) & \end{cases}$  هر گاه تبدیل لاپلاس تابع  $F(t)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{2e^{\pi s}}{(1+s^2)(e^{\pi s}-1)}$

(۲)  $\frac{e^{\pi s}+1}{(1+s^2)(e^{\pi s}-1)}$

(۳)  $\frac{2e^{\pi s}-1}{(1+s^2)(e^{\pi s}-1)}$

(۴)  $\frac{2e^{\pi s}-1}{s(s^2+1)(1+e^{-\pi s})}$

۶۲- با جایگذاری  $t = e^x$  معادله دیفرانسیل  $y'' + \frac{1}{t}y' + e^x y = 0$  به کدام یک از معادلات زیر تبدیل می‌شود؟

(۱)  $(1-t)\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{t}{t}-t\right)\frac{dy}{dt} + y = 0$

(۲)  $t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{t}{t}-t\right)\frac{dy}{dt} + y = 0$

(۳)  $(1-t^2)\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{t}-t\right)\frac{dy}{dt} + y = 0$

(۴)  $(1-t^2)\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{t}{t}+t\right)\frac{dy}{dt} + y = 0$

۶۳- معادله  $x dx - y dy = 0$  مفروض است. هر گاه از یک نقطه دلخواه مانند  $P$  واقع روی یکی از منحنی‌های انتگرال مماس  $PT$

را رسم کنیم و قرینه نقطه  $P$  را نسبت به محور  $x$ ها نقطه  $Q$  بنامیم، کدام گزینه صحیح است؟ ( $O$  مبدا مختصات است.)

(۱)  $OQ$  بر  $PT$  عمود است.

(۲)  $OQ$  بر  $PT$  عمود نیست.

(۳)  $OP$  بر  $OQ$  عمود است.

(۴) مثلث  $POQ$  متساوی الاضلاع است.

۶۴- جواب عمومی معادله  $y^r y'' + rxy' - y = 0$  کدام است؟

$$r c x^r = y - c^r \quad (۱)$$

$$r c x = y^r - c^r \quad (۲)$$

$$r x = c y^r - c^r \quad (۳)$$

$$r x^r = c y - c^r \quad (۴)$$

۶۵- جواب عمومی معادله زیر کدام است؟

$$\left( \frac{\ln(\ln y)}{x} + \frac{r}{r} x y^r \right) dx + \left( \frac{\ln x}{y \ln y} + x^r y^r \right) dy = 0$$

$$(\ln x)(\ln(\ln y)) + x^r y^r = c \quad (۱)$$

$$\frac{1}{x} \ln(\ln(y)) + \frac{1}{r} x^r y^r = c \quad (۲)$$

$$\frac{1}{x} \ln(\ln y) + x^r y^r = c \quad (۳)$$

$$(\ln x)(\ln(\ln y)) + \frac{1}{r} x^r y^r = c \quad (۴)$$

۶۶- جواب عمومی معادله دیفرانسیل  $x(ydx + xdy) = (1 + x^r y^r) \ln x dx$  کدام است؟

$$\operatorname{tg}^{-1} x = \frac{1}{r} (\ln y)^r + c \quad (۱)$$

$$\operatorname{tg}^{-1} y = \frac{1}{r} (\ln x)^r + c \quad (۲)$$

$$\operatorname{tg}^{-1}(xy) = \frac{1}{r} (\ln x)^r + c \quad (۳)$$

$$\operatorname{tg}^{-1}(xy) = \frac{1}{r} (\ln y)^r + c \quad (۴)$$

۶۷- جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر برابر است با:

$$(x^r + y^r)(x + yy') + (x^r + y^r - rx + ry)(y - xy') = 0$$

$$x^r + y^r + ry = c(x^r + y^r)^{\frac{1}{r}} e^{\frac{1}{r} \tan^{-1} \frac{x}{y}} \quad (1)$$

$$x^r + y^r - ry = c(x^r + y^r)^{\frac{1}{r}} e^{\frac{1}{r} \tan^{-1} \frac{y}{x}} \quad (2)$$

$$x^r + y^r - ry = c(x^r + y^r)^{\frac{1}{r}} e^{\frac{1}{r} \tan^{-1} \frac{x}{y}} \quad (3)$$

$$x^r + y^r + ry = c(x^r + y^r)^{\frac{1}{r}} e^{\frac{1}{r} \tan^{-1} \frac{y}{x}} \quad (4)$$

۶۸- جواب معادله  $2xyy' = x^r + y^r$  در صورتی که  $x$  به سمت صفر میل کند، کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

$$-\infty \quad (1)$$

$$\text{صفر} \quad (2)$$

$$-1 \quad (3)$$

$$\infty \quad (4)$$

۶۹- جواب عمومی معادله زیر کدام است؟

$$y' = (x - y)(y - x + 1) + 1$$

$$y = \frac{1 - x}{-1 + ce^x} \quad (1)$$

$$y = \frac{1 - x + cxe^x}{-x + ce^x} \quad (2)$$

$$y = \frac{1 - x + cxe^x}{-1 + ce^x} \quad (3)$$

$$y = \frac{1 - ce^x}{1 - x + cxe^x} \quad (4)$$

۷۰- جواب عمومی معادله دیفرانسیل  $x^r y'^r - 2xyy' + y^r - e^r y' = 0$  کدام است؟

$$(y + e^{-x} + c)(y - e^{-x} + c) = 0 \quad (1)$$

$$(y + cx + e^c)(y + cx - e^c) = 0 \quad (2)$$

$$(y + e^x + c)(y - e^x + c) = 0 \quad (3)$$

$$(y - cx + e^c)(y - cx - e^c) = 0 \quad (4)$$

۷۱- کدام گزینه جواب عمومی معادله دیفرانسیل  $y^2 dx = (x^2 - xy)dy$  را نشان می‌دهد؟

$$x^2 y^2 \left( \frac{2}{3} y^{-2} + c \right) = 1 \quad (۱)$$

$$y \left( \frac{2}{3} y^{-2} + c \right) = 1 \quad (۲)$$

$$x \left( \frac{2}{3} y^{-2} + c \right) = 1 \quad (۳)$$

$$xy \left( \frac{2}{3} y^{-2} + c \right) = 1 \quad (۴)$$

۷۲- در دستگاه  $\begin{cases} \varphi_1(x) = e^{rx} + \int_0^x \varphi_2(t) dt \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x e^{r(x-t)} \varphi_1(t) dt \end{cases}$  برای کدام گزینه است؟

$$-2 - 3e^x \quad (۱)$$

$$3e^x - 3e^{-x} \quad (۲)$$

$$+2 + 3e^{-x} \quad (۳)$$

$$-2 + 3e^x \quad (۴)$$

۷۳- جواب انتگرال زیر کدام است؟ (a ثابت مثبت و  $c > -1$  و n عددی مثبت و فرد می‌باشد.)

$$I = \int_0^\infty x^c e^{-ax^n} dx$$

$$\frac{1}{na^{\frac{c-n+1}{n}}} \Gamma\left(\frac{c-n+1}{n}\right) \quad (۱)$$

$$\frac{1}{na^{\frac{n-c+1}{n}}} \Gamma\left(\frac{n+1}{c}\right) \quad (۲)$$

$$\frac{1}{na^{\frac{c+1}{n}}} \Gamma\left(\frac{c+1}{n}\right) \quad (۳)$$

$$\frac{1}{na^{c+1}} \Gamma\left(\frac{c+2n-1}{n}\right) \quad (۴)$$

۷۴- حاصل  $\int_{-1}^1 (x - x^2) P_n(x) dx$  کدام است که در آن  $P_n(x)$  چند جمله‌ای لژاندر از درجه  $n$  است؟

(۱)  $-\frac{1}{2}$

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳) صفر

(۴) ۱

۷۵- یک انتگرال خصوصی مربوط به متغیر وابسته  $x$  در دستگاه زیر کدام است؟

$$\begin{cases} 2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d^2 y}{dt^2} + 5x + 2y = -\lambda \sin 2t \\ \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d^2 y}{dt^2} + 7x + 5y = \lambda \sin 2t \end{cases}$$

(۱)  $x_p(t) = 2 \cos 2t$

(۲)  $x_p(t) = 2 \sin 2t$

(۳)  $x_p(t) = 2 \sin 2t + \cos 2t$

(۴)  $x_p(t) = 2 \sin 2t$

۷۶- معکوس تبدیل لاپلاس  $\{\sqrt{s+1} - \sqrt{s}\}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{r}{2}} (1 + e^{-t})$

(۲)  $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{-\frac{r}{2}} (1 - e^{-t})$

(۳)  $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{\frac{r}{2}} (1 - e^{-t})$

(۴)  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{r}{2}} (1 + e^{-t})$

۷۷-  $x$  و  $\frac{1}{x}$  دو جواب مستقل خطی یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن هستند. ضریب مشتق مرتبه اول در این معادله

کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{x^2}$

(۲)  $x^2$

(۳)  $x$

(۴)  $\frac{1}{x}$

۷۸- جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟

$$x^2 y'' = (y - xy')^2$$

(۱)  $y = \frac{x^2}{c_1 + c_2 x}$

(۲)  $y = \ln \left| \frac{x}{c_1 + c_2 x} \right|$

(۳)  $y = x \ln \left| \frac{x}{c_1 + c_2 x} \right|$

(۴)  $y = x + \ln \left| \frac{c_1 + c_2 x}{x} \right|$

۷۹- با جایگذاری  $y' = u$  معادله  $(xy' - y)^2 = -x^2 yy''$  به کدام معادلهٔ اوایلر-کشی (هم بُعدکشی) تبدیل می‌شود؟

(۱)  $2x^2 u'' + xu' - u = 0$

(۲)  $x^2 u'' - xu' + u = 0$

(۳)  $2x^2 u'' - xu' - u = 0$

(۴)  $x^2 u'' - 2xu' + 2u = 0$

۸۰- جواب عمومی معادله دیفرانسیل  $(x-1)y'' - xy' + y = 0$  کدام است؟

(۱)  $c_1 e^{-x} + c_2 x$

(۲)  $c_1 x e^{-x} + c_2 e^x$

(۳)  $c_1 e^x + c_2 x$

(۴)  $c_1 e^{-x} + c_2 x e^x$

۸۱- جواب عمومی معادله دیفرانسیل  $y'' - \frac{1}{x} y' - \frac{2}{x^2} y = 0$  کدام گزینه است؟

(۱)  $y = c_1 e^{2x} + c_2 x^{-1}$

(۲)  $y = c_1 x^2 + c_2 x^{-1}$

(۳)  $y = c_1 x^2 + c_2 e^{-x}$

(۴)  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$

۸۲- فرض کنید  $t$  مماس بر منحنی  $c$  در نقطه  $p$  باشد. معادله خانواده‌ای از منحنی‌ها، با این خاصیت که فاصله مبدا تا مماس  $t$  مساوی طول نقطه  $p$  باشد، کدام است؟

(۱)  $x^2 + y^2 = cx$

(۲)  $x^2 + y = cx$

(۳)  $x^2 + y^2 = cy$

(۴)  $cx + y^2 = y$

۸۳- بازه‌ای که در آن مسأله مقدار اولیه زیر دارای جواب است کدام است؟

$(x-4)y' + (\ln(x))y = 2x$   
 $y(2) = 3$

(۱)  $(0, 4)$

(۲)  $P^+$

(۳)  $(-1, 4)$

(۴)  $(4, +\infty)$

۸۴- معادله دیفرانسیل  $4x^2 y'' + 4xy' + (\lambda x^2 - 1)y = 0$  مفروض است با فرض اینکه

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

توابع بسل به ترتیب از مرتبه  $\frac{1}{2}$  و  $-\frac{1}{2}$  باشند، جواب عمومی معادله

داده شده کدام است؟

$$y = A_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + A_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \quad (1)$$

$$y = A_1 \frac{\sin \sqrt{2}x}{\sqrt{x}} + A_2 \frac{\cos \sqrt{2}x}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$y = A_1 \frac{\sin \sqrt{x}}{x} + A_2 \frac{\cos \sqrt{x}}{x} \quad (3)$$

$$y = A_1 \frac{\sin \sqrt{2}x}{x} + A_2 \frac{\cos \sqrt{2}x}{x} \quad (4)$$

۸۵- فرض کنید  $y = f(x, c)$  جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر باشد:

$$\frac{dy}{dx} + y = 2 \sin x$$

در این صورت  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, c)$

(۱) موجود نیست.

(۲) برابر  $\infty$  است.

(۳) برابر ۲ است.

(۴) برابر صفر است.

سطح زیر منحنی نرمال استاندارد

z	0.0	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9700	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9975	.9976	.9977	.9978	.9979	.9980	.9981	.9982	.9983	.9984
2.9	.9985	.9986	.9987	.9988	.9989	.9990	.9991	.9992	.9993	.9994
3.0	.9995	.9996	.9997	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.1	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.2	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.3	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.4	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

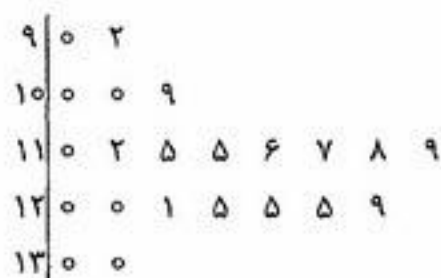
مقادیر بحرانی توزیع t

df	.10	.05	.025	.01	.005
1	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.331	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.322	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.714	2.069	2.509	2.807
23	1.319	1.711	2.064	2.492	2.797
24	1.318	1.708	2.060	2.485	2.787
25	1.316	1.706	2.056	2.479	2.779
26	1.315	1.705	2.052	2.473	2.771
27	1.314	1.703	2.048	2.467	2.763
28	1.313	1.701	2.045	2.462	2.756
29	1.311	1.699	2.043	2.458	2.750

مقادیر بحرانی توزیع مربع کای

df	.995	.990	.975	.950	.900	.800	.700	.600	.500	.25	.10	.05
1	4E-5	0.0001	0.0009	0.0039	0.0158	0.0384	0.0541	0.0675	0.0788	5.0238	6.6349	7.879
2	0.010	0.0201	0.0506	0.1025	0.2107	0.3007	0.3745	0.4383	0.4959	7.3777	9.2103	10.596
3	0.071	0.1143	0.2158	0.3518	0.5845	0.7368	0.8538	0.9402	1.0128	7.8147	9.3484	12.838
4	0.206	0.2971	0.4844	0.7107	1.0645	1.3858	1.6267	1.8009	1.9280	9.4877	11.144	14.860
5	0.411	0.5543	0.8312	1.1454	1.6759	2.2027	2.6750	3.0766	3.3542	11.070	12.832	15.086
6	0.675	0.8720	1.2373	1.6353	2.2027	2.7922	3.2470	3.6192	3.9195	12.591	14.449	16.759
7	0.989	1.2390	1.6908	2.1673	2.8978	3.5016	3.9675	4.3484	4.6386	14.067	16.012	18.475
8	1.344	1.6465	2.1797	2.7326	3.3331	3.9478	4.4181	4.7999	5.0892	15.507	17.534	20.274
9	1.734	2.0879	2.7003	3.3331	3.9478	4.5706	5.0308	5.4127	5.6974	16.918	19.022	21.559
10	2.155	2.5582	3.2469	3.9403	4.5706	5.1328	5.5938	5.9757	6.2601	18.307	20.483	23.588
11	2.603	3.0534	3.8157	4.5706	5.1328	5.6958	6.1568	6.5387	6.8230	19.675	21.920	25.188
12	3.073	3.5703	4.4037	5.2160	5.7779	6.3391	6.7999	7.1818	7.4661	21.026	23.336	26.756
13	3.565	4.1069	5.0087	5.8918	6.4786	7.0601	7.5209	7.9028	8.1870	22.362	24.735	28.299
14	4.074	4.6604	5.6387	6.5706	7.1614	7.7216	8.1824	8.5643	8.8485	23.684	26.118	29.819
15	4.600	5.1793	6.2621	7.2609	7.8713	8.4315	8.8923	9.2742	9.5584	25.000	27.488	31.319
16	5.142	5.8122	6.9076	7.9616	8.5717	9.1319	9.5927	9.9746	10.2588	26.365	28.845	32.801
17	5.697	6.4077	7.5041	8.6717	9.2818	9.8419	10.3027	10.6846	10.9688	27.587	30.191	34.267
18	6.266	7.0149	8.2107	9.3904	9.9917	10.5518	11.0126	11.3945	11.6787	28.869	31.526	35.718
19	6.843	7.6527	8.9065	10.117	10.818	11.378	11.8396	12.2215	12.5057	30.143	32.852	37.156
20	7.433	8.3004	9.5907	10.850	11.551	12.111	12.5719	12.9538	13.2379	31.410	34.169	38.582
21	8.033	8.8972	10.382	11.591	12.293	12.893	13.353	13.7352	14.0193	32.670	35.478	39.996
22	8.643	9.5044	11.088	12.338	13.086	13.686	14.046	14.4275	14.7116	33.924	36.780	41.401
23	9.262	10.119	11.801	13.086	13.789	14.389	14.750	15.131	15.4152	35.172	38.075	42.795
24	9.886	10.736	12.421	13.848	14.541	15.041	15.402	15.783	16.0671	36.415	39.364	44.181
25	10.52	11.353	13.119	14.611	15.302	15.802	16.163	16.544	16.8281	37.652	40.651	45.558
26	11.16	12.198	13.843	15.379	16.069	16.569	16.930	17.291	17.5741	38.885	41.933	46.927
27	11.80	13.054	14.617	16.151	16.851	17.351	17.712	18.073	18.3571	40.113	43.215	48.289
28	12.45	13.921	15.407	16.937	17.637	18.137	18.498	18.859	19.1431	41.337	44.460	49.644
29	13.12	14.798	16.217	17.708	18.507	19.007	19.368	19.729	20.0131	42.556	45.722	50.993
30	13.78	15.683	17.041	18.492	19.389	20.089	20.449	20.810	21.171	43.772	46.979	52.335

۸۶- اگر نمودار زیر نمایشی از نمودار ساقه و برگ (تنه و شاخه) داده‌ها باشد و  $Q_1$ ،  $Q_2$  و  $Q_3$  به ترتیب نمایانگر چارک اول، دوم و سوم باشند، مقدار  $(Q_1, Q_2, Q_3)$  کدام است؟



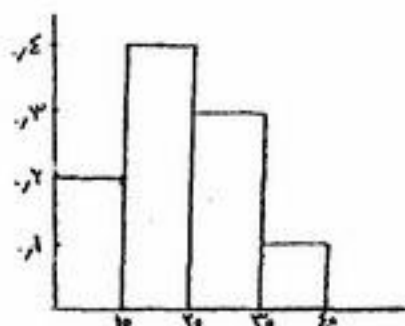
(۱) (۱۰۹, ۱۱۸, ۱۲۱)

(۲) (۱۱۰, ۱۱۷/۵, ۱۲۵)

(۳) (۱۱۲, ۱۱۷/۵, ۱۲۱)

(۴) (۱۱۰, ۱۱۷, ۱۲۹)

۸۷- با توجه به هیستوگرام زیر مقدار میانه کدام است؟



(۱) ۱۲

(۲) ۱۵

(۳) ۱۹

(۴) ۱۷

۸۸- ۲۵ مهره یکسان را می‌خواهیم در سه جعبه A، B و C قرار دهیم به طوری که در جعبه A حداقل یک مهره، در جعبه B حداقل ۲ مهره و در جعبه C حداقل ۳ مهره قرار گیرد. به چند طریق می‌توان اینکار را انجام داد؟

(۱) ۱۷۱

(۲) ۲۱۰

(۳) ۳۰۰

(۴) ۲۳۱

۸۹- فرض کنید A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند. اگر احتمال اینکه B اتفاق نیافتد برابر با b و احتمال اینکه هیچ کدام اتفاق نیافتند برابر با a باشد، مقدار  $P(A)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1-a}{1-b}$

(۲)  $\frac{1-b}{1-a}$

(۳)  $\frac{b}{1-a}$

(۴)  $\frac{a}{1-b}$

۹۰- یک تاس ۸ وجهی را هفت بار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه ماکزیمم وجه ظاهر شده دقیقاً ۶ باشد کدام است؟

$$(1) \frac{5^7}{8^7}$$

$$(2) \frac{6^7}{8^7}$$

$$(3) \frac{6^7 - 5^7}{8^7}$$

$$(4) \frac{7^6 - 7^5}{8^7}$$

۹۱- ۹ توپ یکسان و یک شکل را به تصادف در سه جعبه می‌ریزیم. فرض کنید  $X_i$  تعداد توپ‌های جعبه  $i$ ام باشد و احتمال اینکه توپی در هر جعبه قرار گیرد برابر باشد. احتمال اینکه تعداد توپ‌های هر سه جعبه برابر باشند کدام است؟

$$(1) \frac{1}{3}$$

$$(2) \frac{1}{27}$$

$$(3) \frac{7!}{3^{10}}$$

$$(4) \frac{1}{6^9}$$

۹۲- اگر  $X$  یک متغیر تصادفی برنولی با پارامتر  $p$  باشد. مقدار  $\sum_{i=1}^n E(X^i)$  کدام است؟

$$(1) np$$

$$(2) (1+p)^n$$

$$(3) \sum_{i=1}^n p^i (1-p)^{n-i}$$

$$(4) \sum_{i=1}^n p^i$$

۹۳- فرض کنید  $X$  دارای توزیع پواسون با واریانس یک است. مقدار  $P(X^2 = X)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{4}e^{-1}$

(۲)  $\frac{1}{2}e^{-1}$

(۳)  $2e^{-1}$

(۴)  $e^{-1}$

۹۴- فرض کنید  $X \sim B\left(25, \frac{1}{2}\right)$ . مقدار  $E[(-1)^{X+10}]$  کدام است؟

(۱) -۱

(۲) صفر

(۳) +۱

(۴)  $\frac{1}{2}$

۹۵- فرض کنید  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع هندسی یکسان با پارامتر  $p$  باشند. مقدار  $P[X = Y]$  کدام است؟

(۱)  $\frac{q}{p+2q}$

(۲)  $\frac{p}{2p+q}$

(۳)  $\frac{q}{2p+q}$

(۴)  $\frac{p}{p+2q}$

۹۶-  $Y$  دارای توزیع  $\chi^2$  با واریانس ۴۰۰ می باشد. مقدار  $P(Y > 200)$  به تقریب کدام است؟

(۱) صفر

(۲)  $\frac{1}{4}$

(۳) یک

(۴)  $\frac{1}{2}$

۹۷- فرض کنید  $X_1$  و  $X_2$  متغیرهای تصادفی مستقل با تابع چگالی احتمال‌های زیر باشند،

$$f_{X_1}(x) = e^{-x}, x > 0 \text{ و } f_{X_2}(x) = 2e^{-2x}, x > 0$$

اگر  $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2\}$  مقدار  $P(X_{(1)} = X_1)$  کدام است؟

(۱) ۰

(۲)  $\frac{1}{3}$

(۳)  $\frac{2}{3}$

(۴)  $\frac{1}{2}$

۹۸- اگر  $X_1$  و  $X_2$  یک نمونه تصادفی دوتایی از توزیع کی دو  $(\chi^2)$  با ۱۰ درجه آزادی باشد، مقدار  $P(X_1 < X_2)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{8}$

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{7}{8}$

(۴) هیچ کدام

۹۹- فرض کنید  $X$  نمایانگر تعداد آزمایش‌های مستقل برنولی با احتمال  $Y$  تا حصول اولین موفقیت باشد متغیر تصادفی  $Y$  دارای

توزیع یکنواخت روی بازه  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  باشد، مقدار  $\text{Cov}(X, Y)$  کدام است؟

(۱)  $1 - \frac{3}{2} \ln 2$

(۲)  $1 - \frac{2}{3} \ln 2$

(۳)  $\frac{3}{2} \ln 2$

(۴)  $\frac{2}{3} \ln 2$

۱۰۰- اگر  $\bar{X}$  میانگین یک نمونه ۲۵ تایی از توزیع  $N(\mu, 25)$  باشد. ضریب اطمینان فاصله اطمینان  $(\bar{X} - 2, \bar{X} + 2)$  برای پارامتر  $\mu$  کدام است؟  $(\Phi(0))$  نشانگر تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است.

(۱)  $2\Phi(2) - 1$

(۲)  $1 - 2\Phi(2)$

(۳)  $2\Phi\left(\frac{2}{5}\right) - 1$

(۴)  $1 - 2\Phi\left(\frac{2}{5}\right)$

۱۰۱- فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f(x; \theta) = \begin{cases} (\theta - 1)e^{-(\theta - 1)x} & \theta > 1, x > 0 \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

برآوردگر گشتاوری  $\theta$  کدام است؟

(۱)  $1 + \frac{1}{\bar{X}^2}$

(۲)  $\bar{X} - 1$

(۳)  $1 + \frac{1}{\bar{X}}$

(۴)  $\bar{X} + 1$

۱۰۲- فرض کنید تابع مولد گشتاور  $X$  برابر است با:

$$M(t) = \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{2t}$$

مقدار  $P(|X| \leq 1)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{12}$

(۲)  $\frac{5}{12}$

(۳)  $\frac{7}{12}$

(۴)  $\frac{6}{12}$

۱۰۳- اگر  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از  $X$  با تابع احتمال  $P[X=1]=p$  و  $P[X=-1]=q$ ،  $p+q=1$ ، برآورد ماکزیمم درستتمایی  $p$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1+\bar{X}}{2}$

(۲)  $\frac{1-\bar{X}}{2}$

(۳)  $1-\frac{\bar{X}}{2}$

(۴)  $1+\frac{\bar{X}}{2}$

۱۰۴- در یک بررسی آماری، صفت مورد بررسی دارای توزیع نرمال با انحراف معیار ۵ است. اگر هدف از بررسی، آزمون  $H_0: \mu=25$  در مقابل  $H_1: \mu=27$  با احتمال خطای نوع اول ۵٪ و توان ۹۵٪ باشد، تعداد تقریبی نمونه تصادفی کدام است؟

(۱) ۶۸

(۲) ۸۲

(۳) ۹۶

(۴) ۹۱

۱۰۵- فرض کنید  $X$  دارای تابع احتمال زیر باشد:

$x$	۱	۲	۳
$f_\theta(x)$	$\frac{\theta}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1-\theta}{3}$

برای آزمون فرض  $H_0: \theta = \frac{1}{3}$  در مقابل  $H_1: \theta = \frac{2}{3}$ ، اگر ناحیه بحرانی به صورت  $\{2, 3\}$  باشد، احتمال خطای نوع اول  $(\alpha)$  و احتمال خطای نوع دوم  $(\beta)$  کدام است؟

(۱)  $(\alpha, \beta) = \left(\frac{5}{9}, \frac{1}{9}\right)$

(۲)  $(\alpha, \beta) = \left(\frac{5}{9}, \frac{2}{9}\right)$

(۳)  $(\alpha, \beta) = \left(\frac{7}{9}, \frac{2}{9}\right)$

(۴)  $(\alpha, \beta) = \left(\frac{8}{9}, \frac{2}{9}\right)$

۱۰۶- یک دنباله از آزمایش‌های مستقل برنولی با احتمال موفقیت برابر  $0/2$ ،  $0/3$  یا  $0/7$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $X$  تعداد آزمایش‌های لازم برای به دست آوردن اولین موفقیت باشد و علاقمند به آزمون  $H_0: p=0/7$  در مقابل  $H_1: p \neq 0/7$  هستیم. فرض  $H_0: p=0/7$  رد می‌شود اگر و تنها اگر  $X \geq 3$ ، مقدار احتمال خطای نوع I و II (به ترتیب از راست به چپ) کدام است؟ ( $p+q=1$ )

(۱)  $0/06$  و  $q + pq + p^2q$

(۲)  $0/07$  و  $q + pq$

(۳)  $0/09$  و  $p + pq$

(۴)  $0/08$  و  $p + pq + pq^2$

۱۰۷- در یک مدل رگرسیون خطی ساده  $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ ، اگر بر اساس یک نمونه تصادفی ۱۲ تایی خلاصه اطلاعات زیر حاصل شود،

$$S_{XY} = 300, S_X^2 = 120, SSE = 240$$

برآورد به روش حداقل مربعات برای  $\beta_1$  و مجموع مربعات کل کدام است؟

(۲)  $\hat{\beta}_1 = 1/5, S_Y^2 = 990$

(۱)  $\hat{\beta}_1 = 2/5, S_Y^2 = 909$

(۴)  $\hat{\beta}_1 = 2/5, S_Y^2 = 990$

(۳)  $\hat{\beta}_1 = 2/5, S_Y^2 = 99$

۱۰۸- معادله خط رگرسیونی برازش شده به نقاط زیر از کدام نقطه می‌گذرد؟

X	-3	-2	1	1	1	2
Y	-5	-4	2	1	2	4

(۱)  $(0, 1)$

(۲)  $(0, 0)$

(۳)  $(1, 0)$

(۴)  $(1, 1)$

۱۰۹- در یک مدل رگرسیون خطی ساده  $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$  که در آن  $Y$  متغیر پاسخ و  $X$  متغیر مستقل است. بر اساس یک نمونه تصادفی ۲۵ تایی، خلاصه اطلاعات زیر حاصل شده است:

$$\bar{x} = 2, \bar{y} = 4, S_X^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 = 9, S_Y^2 = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = 16, S_{XY} = -9$$

ضریب تعیین کدام است؟

(۱)  $\frac{9}{16}$

(۲)  $\frac{16}{9}$

(۳)  $\frac{7}{4}$

(۴)  $\frac{6}{7}$

۱۱۰- در یک آزمون مشترک نمره درس سه گروه دانشجو با سه معلم متفاوت به شرح زیر است:

گروه ۱	گروه ۲	گروه ۳
۴	۵	۹
۷	۷	۵
۳	۲	۷
۴	۴	۳
۷	۲	۶

با فرض نرمال بودن داده‌ها و همگنی واریانس‌ها، مجموع مربعات خطا (SSE) و میانگین کل کدام است؟

(۱)  $\frac{11}{4}$  و ۵

(۲)  $\frac{13}{3}$  و ۵

(۳)  $\frac{14}{3}$  و ۶

(۴)  $\frac{12}{5}$  و ۶